Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Final den 25 november 1962

1. Bestäm alla polynom $f(x)$, sådana att $f(2x) = f'(x) \cdot f''(x)$.

2. På en sida i en kvadrat med sidolängden 1 ligger två variabla punkter och på motstående sida en tredje variabel punkt. Punkterna utgör hörn i en triangel. Mellan vilka gränser varierar radien till triangelns omskrivna cirkel?

3. Bestäm alla par (x, y) av heltal x och y som satisfierar ekvationen

$$y^2 - 3xy + x - y = 0.$$

4. Vilka av följande påståenden är sanna? Svaren måste motiveras.

   a) Åtminstone ett av påståendena “linjerna l_1, l_2 och l_3 ligger i ett plan” och “linjerna l_1, l_2, och l_3 skär varandra parvis” är en följd av det andra. (Linjerna är linjer i rymden.)

   b) Det finns ett tal N så att varje heltal $\geq N$ är summan av två fjärdepotenser av heltal.

   c) Det finns tal $a_1, a_2, \ldots, a_n$ så att

$$a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx > 0, \qquad \text{för alla} \qquad x.$$

5. En regelbunden tetraeder med kantlängden 1 är given. I dess inre ligger en rörlig kub med sidan a. Kuben kan förflyttas inom tetraedern så att *vilken som helst* av dess sidoytor kan fås att vila mot tetraederns basyta. Bestäm något a för vilket detta är möjligt.
(Ju större värde på a som bestäms, desto högre blir poängutdelningen.)

För dessa problem har man nytta av ett par geometriska resultat som numera försvunnit ur skolkursen. Låt en triangel ha sidorna a, b och c längdenheter och ytan T ytenheter. Då är den omskrivna cirkelns radie $R = abc/4T$, och den inskrivna cirkelns radie är $r = 2T/(a + b + c)$. För bevisen se någon äldre gymnasielärobok.