XII Internationella Matematikolympiaden
Keszthely, Ungern 1970

Lösningar dag 2

4. Antag att $M = \{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ kan delas upp i två disjunkta mängder M_1 och M_2 så att

$$M = M_1 \cup M_2, \ \ M_1 \neq \emptyset, \ M_2 \neq \emptyset, \ M_1 \cap M_2 = \emptyset \ \text{ och } \ p_1 = \prod_{m \in M_1} m = \prod_{m \in M_2} m = p_2.$$

Låt p vara ett primtal sådant att $p\,|p_1$. Då delar p ett av talen $m_1 \in M_1$. Men då gäller också $p\,|p_2$ och p delar något tal $m_2 \in M_2$ Eftersom $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ är $m_1 - m_2 \neq 0$ och $p|(m_1 - m_2)$. Alltså är $p \leq |m_1 - m_2| \leq 5$. De primtal som kan komma i fråga är alltså $p = 2$, $p = 3$ och $p = 5$. Av sex konsekutiva heltal finns minst ett som är delbart med 5. Olikheten $5 \leq |m_1 - m_2| \leq 5$ har bara två lösningar med $m_1, m_2 \in M$, nämligen $m_1 = n$ och $m_2 = n+5$ eller $m_1 = n+5$ och $m_2 = n$. Talen n och $n+5$ måste alltså tillhöra olika delmängder. Två av de övriga fyra (konsekutiva) talen i M är då udda och inte delbara med 5. Eftersom $n+1 \geq 2$ måste dessa udda tal i M också vara ≥ 3. De måste då vara av formen 3^s och 3^t, med $s, t \geq 1$. Men avståndet mellan två konsekutiva udda heltal är 2. Däremot är, för $s > t \geq 1$, $3^s - 3^t = 3^t(3^{s-t} - 1) \geq 3 \cdot 2$. Vårt antagande att det fanns en sönderdelning leder till en motsägelse.

En alternativ lösning, som också ger en generalisering av problemet, är följande
Sedan man visat att de enda primfaktorer som kan förekomma i mängdens element är 2, 3 och 5, konsterar man att de sex konsekutiva heltalen i mängden är inkongruenta modulo 7 och inget av dem är delbart med 7. Då gäller

$$p_1^2 \equiv p_1 p_2 \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \equiv 6 \pmod 7.$$

Men en kvadrat kan bara vara kongruent med 1, 2 eller 4 modulo 7.
Wilsons sats och Fermats lilla sats ger följande generella resultat
Låt p vara ett primtal sådant att $(p-1)/2$ är udda. Då kan ingen delmängd $M \subset Z$ innehållande $p-1$ konsekutiva heltal delas upp i två mängder M_1 och M_2 sådana att

$$M = M_1 \cup M_2, \ \ M_1 \neq \emptyset, \ M_2 \neq \emptyset, \ M_1 \cap M_2 = \emptyset \ \text{ och } \ p_1 = \prod_{m \in M_1} m = \prod_{m \in M_2} m = p_2.$$

Antag att en sådan uppdelning är möjlig för någon mängd M med $p-1$ konsekutiva heltal. Elementen i M är då inkongruenta modulo p och inget element i M kan vara kongruent med 0 modulo p ty då vore en av produkterna p_1 eller p_2 kongruent med 0 modulo p men inte den andra. Men då är $p_1 p_2 \equiv (p-1)! \equiv -1 \pmod p$, enligt Wilsons sats. Av $p_1 = p_2$ följer då att $p_1^2 \equiv -1 \pmod p$. Men då är

$$p_1^{p-1} \equiv (p_1^2)^{(p-1)/2} \equiv (-1)^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod p.$$

Detta strider mot Fermat sats. Det finns ingen mängd med en sådan uppdelning.
För $p = 7$ är $(p-1)/2 = 3$ och detta löser det ursprungliga problemet.
Svar: En sådan uppdelning är inte möjlig.

5. Vi visar först att alla vinklarna vid D är räta. Låt H beteckna höjdernas skärningspunkt i triangeln ABC. Då har vi $AC \perp BH$, eftersom BH är höjd mot sidan AC. Vidare $AC \perp DH$, ty DH normal mot planet ABC. Eftersom AC är vinkelrät mot både BH och DH får vi även $AC \perp DB$. Enligt förutsättningen är $DC \perp DB$. Alltså är DB vinkelrät mot både AC och DC, och speciellt då $DB \perp DA$. På samma sätt får vi att $\angle ADC$ är rät, och vi har alltså visat att alla vinklar vid D är räta. Tetraederns sidor DBA, DBC och DAC är alltså tre stycken rätvinkliga trianglar med hypotenusor

BA, BC och AC, respektive. Vi använder Pythagoras sats på var och en av dessa och lägger ihop, och får fram att

$$(i) \qquad 2\left((DA)^2 + (DB)^2 + (DC)^2\right) = (AB)^2 + (BC)^2 + (AC)^2.$$

Det är lätt att se följande formel:

$$\begin{aligned}(ii) \qquad 3\left((AB)^2 + (BC)^2 + (AC)^2\right) &= (AB + BC + AC)^2 \\ &+ (AB - BC)^2 + (BC - AC)^2 + (AB - AC)^2.\end{aligned}$$

Nämligen: utveckla kvadraterna i högerledet. Korstermerna kommer att ta ut varann, och de rena kvadrattermerna ger vänsterledet.
Av (i) och (ii) följer, att

$$6\left((DA)^2 + (DB)^2 + (DC)^2\right) \geq (AB + BC + CA)^2$$

med likhet om och endast om, de tre sista kvadraterna i högerledet i (ii) försvinner, dvs. $AB = BC = AC$, dvs. triangeln ABC är liksidig.

6. Vi använder en ändlig induktion. Vi visar först, att *om andelen spetsvinkliga trianglar inte är större än ett tal a när vi betraktar n punkter i planet, så är andelen inte heller större än a när vi betraktar $n + 1$ stycken punkter*.
Låt $A_1, \ldots, A_{n+1}$ vara $n + 1$ punkter i planet, och låt L vara antalet spetsvinkliga trianglar som man får ur dessa punkter; låt N vara hela antalet trianglar man får. Låt L_i och N_i vara antalet spetsvinkliga, resp. antalet trianglar när vi bortser från punkten A_i. Då

$$L = \frac{L_1 + \cdots + L_{n+1}}{n - 2}; \qquad\qquad N = \frac{N_1 + \cdots + N_{n+1}}{n - 2}$$

för i summan $N_1 + \cdots + N_{n+1}$ räknas varje triangel $n - 2$ gånger, och likadant i summan för L.
Vi har antagit att $L_i \leq aN_i$. Det följer att $L \leq aN$. Det är lätt att visa (överlåter jag av ren slöhet åt er själva) att för $n = 4$ har vi $N = 4$ och $L \leq 3$. Dvs. $a \leq 0.75$.
För $n = 5$, där vi har $N = 10$, följer av induktionssteget och resultatet för $n = 4$, att $L \leq 0.75 \cdot 10$, dvs, eftersom L är heltal, att $L \leq 7$. Alltså är för $n \geq 5$, $a \leq 0.7$. Går vi nu upp till $n = 100$ (induktionsaxiomet är ju egentligen inte alls med här, allt är ändligt) får vi vårt önskade resultat.
Kommentar. Gör vi på samma sätt med $n = 6$ och tar i beräkningen att L är ett heltal får vi $a \leq \dfrac{2}{3}$.
Observera i beviset ovan, att vi ju inte alls behöver betrakta 5-hörningar, och visa resultatet för dessa. Resultatet för ”5-hörningarföljer ju automatiskt ur det faktum att L alltid måste vara heltal, och det mycket enklare resultatet för ”4-hörningar”.