Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 9 oktober 1961

1. I ett plan finns 127 kugghjul, (1), (2), (3), ..., (127). Kugghjulet (1) är hopkopplat med (2), (2) med (3), (3) med (4),..., (127) med (1). Kan ett sådant system gå? Motivera.

2. Försök finna en snabb metod att beräkna $(999999999)^3$ och utför beräkningen.

3. Lös ekvationen $\cos x + \cos^5 x + \cos 7x = 3$.
(Ekvationen kan lösas på ett par rader.)

4. En regelbunden n-hörning och en regelbunden $(n+1)$-hörning är inskrivna i samma cirkel. Visa att man alltid kan plocka ut ett hörn på n-hörningen och ett hörn på $(n+1)$-hörningen så att mellanliggande båge svarar mot en medelpunktsvinkel, som är $< 360/n(n+1)$ grader.

5. En triangel är belägen inuti en månghörning. Visa strängt att triangelns omkrets är mindre än månghörningens. (Man behöver endast utnyttja att den kortaste vägen mellan två punkter är sträckan mellan punkterna.)

6. I det inre av en kvadrat med sidan x cm vill man placera punkter så att alla deras inbördes avstånd är ≥ 1 cm. Det största antalet punkter, som kan placeras in, betecknas med $f(x)$. Det är svårt att exakt bestämma $f(x)$ för stora x, men däremot kan man göra uppskattningar, som stänger in värdet av $f(x)$ mellan vissa gränser. Försök visa att det finns positiva konstanter A och B, båda oberoende av x, sådana att
$$Ax^2 \leq f(x) \leq B(x+1)^2$$
för alla x.

   (Vid bedömningen av lösningen tages hänsyn till om uppskattningen är god, dvs. om B/A inte är alltför stor. Även den som endast lyckats ge ett värde på en av konstanterna bör lämna in sin lösning.)