Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 17 oktober 1962

1. Fyra punkter i ett plan är placerade så att ingen rät linje innehåller tre av punkterna. Visa att det finns en triangel med hörn i tre av punkterna som är sådan att en av dess vinklar ej är spetsig.

2. I dag är det onsdagen den 17 oktober 1962. På vilken veckodag infaller den 17 oktober år 3000? Skottår inträffar om årtalet är jämnt delbart med 4 med det undantaget att år som är jämnt delbara med 100 endast är skottår om de är jämnt delbara med 400.

3. x, y och z är valda så att $\sin x + \sin y + \sin z = 0$ och $\cos x + \cos y + \cos z = 0$. Visa att $\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 0$ och $\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0$.

4. I en flod med parallella rätlinjiga stränder strömmar vattnet med hastigheten 2 m/sek. En person, som brukar simma med hastigheten 1 m/sek i stillastående vatten, simmar över floden så att kroppen bildar en konstant vinkel v med stranden. Hur skall vinkeln v väljas för att personen skall nå den motsatta stranden så högt upp som möjligt längs floden?

5. En funktion $y = f(x)$, definierad för alla reella tal x, uppfyller för alla x och för alla rationella r olikheten
$$|f(x) - f(r)| \leq 7|x - r|^2.$$
Ange alla möjliga sådana funktioner.

6. I. Försök bestämma ett polynom $P_1(x)$ av första graden så att det största värde som antas av $|\sqrt{1+x} - P_1(x)|$ i intervallet $0 \leq x \leq 3$ blir litet. Uppgiften bedöms med hänsyn till storleken på det erhållna värdet.

   II. Speciellt värderas en korrekt motivering för vilket polynom som ger det allra lägsta värdet.

   III. Försök behandla problem I då polynomets gradtal är 2 eller ännu högre.