Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 14 oktober 1964

1. Funktionema $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara i $x = 0$ och kurvorna $y = f(x)$, $y = g(x)$ och $y = f(x) \cdot g(x)/2$ tangerar alla varandra för $x = 0$. Bestäm ekvationen för den gemensamma tangenten i $x = 0$.

2. Talen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ är talen $1, 2, 3, \ldots, n$ skrivna i annan ordning.
   Visa att om n är udda är $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$ jämnt.

3. Hur många rötter har ekvationen $6 \sin^2 x = \sqrt{x^2}$, där x mäts i radianer?

4. I ett rektangulärt rutnät tilldelas varje ruta ett poängvärde. Två personer A och B spelar följande spel. A får ur varje rad välja en ruta. B bestämmer sedan vilket av de så valda poängvärdena som A skall ha. – Med samma utgångsläge utväljer A en ruta ur varje kolumn. B får därefter för egen räkning välja ett av de motsvarande poängvärdena. Kan A ordna så att han säkert får minst så stor poäng som B?

5. Bestäm alla reella polynom P och Q så att $P(a)$ för alla reella tal a är en lösning till ekvationen

   $$x^3 + Q(a)x^2 + (a^4 + 1)x + a^3 + a = 0.$$

   (Lösningen kräver ej omfattande räknearbete.)

6. Kommittén för denna tävling vet inte om det är möjligt att uppdela en liksidig triangel i ändligt många, *samtliga olika stora*, liksidiga trianglar. Lös detta problem, eller bevisa följande resultat om förmodligen har betydelse för en lösning av problemet.

   a) Visa, att om en liksidig triangel är uppdelad i ändligt många liksidiga deltrianglar, så är varje deltriangels sidor parvis parallella med den ursprungliga triangelns sidor.

   b) Visa att om en liksidig triangel är uppdelad i ändligt många olika stora liksidiga trianglar så har den minsta triangeln inget hörn på den givna triangelns periferi.

   c) Visa att en uppdelning i n st. olika stora liksidiga trianglar är omöjlig för alla $n = 2, 3, \ldots, N$, där N bestäms av den tävlande.
   (Ju större N, desto högre poäng, *vid korrekt lösning*.)