Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet   Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till finaltävlingen den 19 november 1961

1. Det andra ekvationssystemet har lösningarna $x = y = 0$ och $x = y = 1$. Den första lösningen satisfierar inte det första systemets andra ekvation. För att analysera orsaken inför vi

$$A = y(x^4 - y^2 + x^2) - x$$

och

$$B = x(x^4 - y^2 + x^2) - 1.$$

De båda systemen kan då skrivas

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \quad \text{resp.} \quad \begin{cases} A = 0 \\ Ax - By = 0 \end{cases}$$

Man inser då, att varje lösning till det första systemet är en lösning till det andra, ty $A = B = 0$ måste innebära att även $Ax - By = 0$. Om vi däremot har en lösning till det *andra* systemet, kan vi lätt sluta oss till att $By = 0$, men det är endast om $y \neq 0$, som vi härav kan dra slutsatsen att $B = 0$, d.v.s. att det *första* systemet är satisfierat.

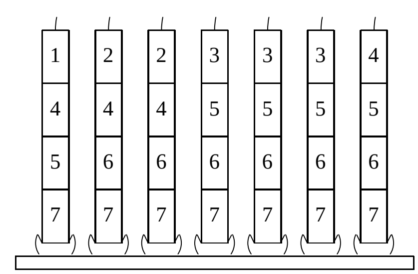
2. För $n = 2$ innebär påståendet att $x_1/x_2 + x_2/x_1 \geq 2$, d.v.s. att $x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1x_2$. Men detta kan skrivas $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$, vilket är uppfyllt, eftersom en kvadrat ej kan vara negativ.
Om $n = 2m$ är jämnt, består summan av m par av formen $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$. Varje par är enligt ovan ≥ 2, d.v.s. summan är $\geq 2m = n$.
Om $n = 2m + 1$ är udda, består summan av m par av formen $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ samt en etta, d.v.s. summan är $\geq 2m + 1 = n$.

3. Låt oss först bestämma ett nödvändigt villkor på n. Antag därför, att n är sådant, att projektet kan genomföras. Först skall ett ljus brinna i en timme, sedan två ljus i en timme o.s.v. fram till n ljus i en timme. Sammanlagda bränntiden är därför

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

timmar (enligt formeln för summan av en aritmetisk serie). Alla ljusen måste brinna lika länge. Varje ljus måste därför brinna i $\frac{1}{2}(n+1)$ timmar. Men detta måste vara ett heltal, eftersom varje ljus brinner ett helt antal timmar. Alltså måste $n + 1$ vara ett jämnt tal och följaktligen är det nödvändigt, att n är ett udda tal.
Vi skall nu visa, att om n är udda $= 2m + 1$, så kan ljustillverkning och ljusbränning ske på det avsedda sättet. Av diskussionenn ovan framgick det, att bränntiden för varje ljus måste vara $\frac{1}{2}(n+1) = m + 1$ timmar. Vi tillverkar därför $2m + 1$ ljus med denna bränntid. Ljuständningen kan ske enligt de principer, som illustrerats i fig. 1, där de delar av ljusen, som brinner på en timme, illustrerats med tvärstreck. I allt har man

fig. 1



Fallet $n = 7$ har här illustrerats

$$1 + 2 + \cdots + 2m + 1 = (2m+1)(m+1) \tag{1}$$

sådana delar. Den första söndagen tänder man ljus 1, den andra ljus 2 och 3. För varje söndag tänder man ljusen till höger om dem, som var tända föregående söndag, och fortsätter från vänster på nästa rad om det behövs. Programmet kan fortsättas ända tills vi tagit det nedersta stycket av det $(2m+1)$:sta ljuset i anspråk. Likheten (1) visar emellertid, att detta sker först då vi tänder sista ljuset sista söndagen.

4. Välj x huvudvägar med inbördes avstånd $1/x$ längdenheter och så, att de yttersta vägarna ligger $1/2x$ längdenheter från AB resp. CD (se fig. 2). Om bivägarna drages till närmaste huvudväg, får alla en längd som är $\leq 1/2x$. Sammanlagda vägnätets längd blir därför mindre än eller lika med

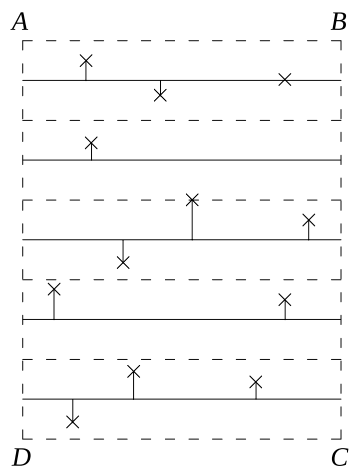
$$f(x) = x \cdot 1 + 288 \cdot \frac{1}{2x} = x + \frac{144}{x}.$$

Låt oss nu studera funktionen $f(x) = x + 144/x$ för alla tal $x > 0$. Vi får

$$f'(x) = 1 - \frac{144}{x^2} = \left(1 - \frac{12}{x}\right)\left(1 + \frac{12}{x}\right);$$
$$f(x) < 0, \text{ då } 0 < x < 12, \quad f(x) > 0, \text{ då } x > 12.$$

Det minsta värdet erhålles därför då $x = 12$.

fig. 2



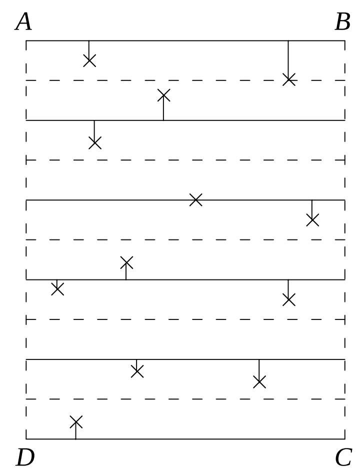


fig. 3

För att få ett kort vägnät är det därför klokt att välja $x = 12$. Längden blir då $\leq f(12) = 24$. Om längden genom detta vägval skulle bli exakt 24, måste alla punkterna ha avstånd exakt $1/2x = 1/24$ till huvudvägarna. Om man i så fall i stället lägger $x + 1$ huvudvägar som i fig. 3 och med $x = 12$, behövs inga bivägar alls. Vägnätet får alltså i detta fall längden 13 längdenheter. Alltså kan vi alltid välja vägnätet så, att dess längd är < 24 längdenheter.

Man kan skärpa detta resultat. Vi studerar därför de båda vägnäten i fig. 2 och fig. 3 för samma x. För varje punkt gäller att summan av längderna av bivägarna till punkten i fig. 2 och fig. 3 är exakt 1/2x. Summan av vägnäten i de båda figurerna blir därför exakt

$$2x + 1 + \frac{288}{2x} = 2x + 1 + \frac{144}{x}.$$

Vi studerar nu funktionen

$$g(x) = 2x + 1 + \frac{144}{x}$$

för alla tal $x > 0$. Undersökning av derivatan visar att funktionen avtar då $0 < x < \sqrt{72}$ och växer då $x > \sqrt{72}$. Det heltalsvärde på x, som ger det minsta värdet, måste därför vara något av dem som ligger närmast $\sqrt{72}$, d.v.s. 8 eller 9. Insättning ger $g(8) = g(9) = 35$. Om man väljer $x = 8$ eller $x = 9$, blir därför summan av de två vägnätens längder 35. Ett av vägnäten måste därför ha en längd, som är $\leq 17,5$ längdenheter.

De använda metoderna kan tillämpas även vid andra punktantal.

5. Vi sätter

$$f(x) = \frac{x^6}{6} + x^2 - nx$$

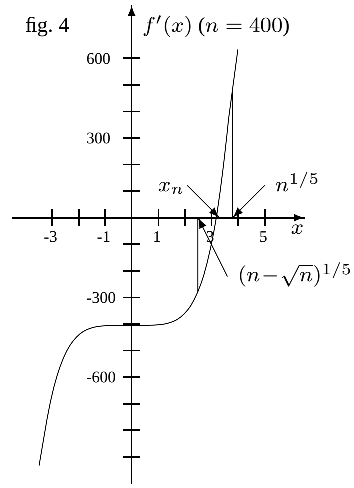
och finner

$$f'(x) = x^5 + 2x - n,$$

vilket är en växande funktion. Eftersom $f'(0) = -n < 0$ och $f'(n) = n^5 + n > 0$, finns det exakt ett nollställe till $f'(x)$ (se fig. 4). Vi kallar detta nollställe x_n, och har alltså $f'(x_n) = 0$. För $x = x_n$ ändrar derivatan tecken från − till +, och $f(x)$ har alltså exakt ett minimum $a_n = f(x_n)$.
Vi skall nu försöka uppskatta x_n. Det är troligt att lösningen till ekvationen $x^5 - n = 0$, alltså $x = n^{1/5}$, för stora n kommer att ge god upplysning om x_n. Vi finner att

$$f'(n^{1/5}) = 2n^{1/5} > 0$$

fig. 4



och eftersom $f(x)$ är växande visar detta att $x_n < n^{1/5}$.
För att få en uppskattning av x_n nedåt försöker vi med $(n - \sqrt{n})^{1/5}$ och finner

$$f'\left((n - \sqrt{n})^{1/5}\right) = 2(n - \sqrt{n})^{1/5} - n^{1/2} < 2n^{1/5} - n^{1/2} = n^{1/5}\left(2 - n^{3/10}\right),$$

som är < 0 för tillräckligt stora n. För $n \geq 16$ gäller detta säkert. Om $n \geq 16$ gäller därför $x_n > (n - \sqrt{n})^{1/5}$.
Sammanfattningsvis kan vi skriva

$$(n - \sqrt{n})^{1/5} < x_n < n^{1/5},$$

om $n \geq 16$, vilket kan skrivas

$$x_n = (n - \theta_n \sqrt{n})^{1/5},$$

där $0 < \theta_n < 1$, då $n \geq 16$.
Härur finner vi

$$a_n = f(x_n) = n^{6/5}\left((1 - \theta_n/\sqrt{n})^{6/5}/6 + n^{-4/5}(1 - \theta_n/\sqrt{n})^{2/5} - (1 - \theta_n/\sqrt{n})^{1/5}\right).$$

Härav följer att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^{6/5}} = -\frac{5}{6}.$$

Vi får således att $k = 6/5$ och gränsvärdet $= -5/6$.

Lösningarna hämtade, med Svenska Matematikersamfundets tillstånd och författarens medgivande, ur:

Tävlingsproblem i matematik
Skolornas matematiktävling 1961 – 1968
Problem och lösningar utgivna av Lars Inge Hedberg
på uppdrag av Svenska Matematikersamfundet