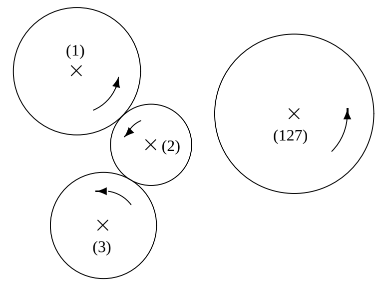
Skolornas Matematiktävling

Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 9 oktober 1961

1. Nej, systemet kan inte gå. Kugghjul som är sammankopplade med varandra roterar åt motsatt håll (se figur). Detta innebär att (1) och (2) går åt motsatt håll, (2) och (3) åt motsatt håll o.s.v. Alltså roterar (1), (3), (5), ... d.v.s. alla hjul med udda nummer åt samma håll. Detta innebär speciellt att (1) och (127) roterar åt samma håll vilket strider mot att de är sammankopplade.



2. Formeln $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ ger

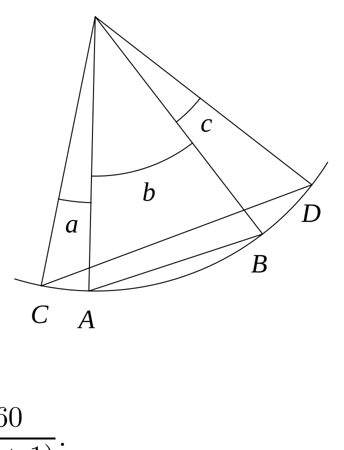
$$\begin{aligned}(999\,999\,999)^3 &= (10^9-1)^3 = 10^{27} - 3\cdot 10^{18} + 3\cdot 10^9 - 1\\ &= 1\,000\,000\,000\,000\,000\,003\,000\,000\,000\\ &- 3\,000\,000\,000\,000\,000\,001\\ &= 999\,999\,997\,000\,000\,002\,999\,999\,999.\end{aligned}$$

3. För alla reella x är

$$\cos x \le 1 \tag{1}$$
$$\cos^5 x \le 1 \tag{2}$$
$$\cos 7x \le 1 \tag{3}$$

varför $\cos x + \cos^5 x + \cos 7x \le 3$. Likhet inträffar om och endast om det samtidigt är likhet i (1), (2) och (3). För att vi skall få likhet i (1) måste vi ha $x = n\cdot 2\pi$, n heltal. Å andra sidan ser man lätt att alla dessa värden ger likhet även i (2) och (3), d.v.s. att de satisfierar ekvationen.

4. Vi kan bortse från det fall då de båda månghörningarna har två sammanfallande hörn. Bågen mellan dessa hörn svarar ju i så fall mot medelpunktsvinkeln 0, d.v.s. olikheten är uppfylld.
n-hörningens hörn delar cirkelperiferin i n lika stora bågar. Det måste finnas två hörn i $(n+1)$-hörningen, som ligger på samma båge, ty annars kunde den inte ha mer än n hörn. I figuren har dessa hörn betecknats med A och B. Punkterna C och D är ändpunkterna på den nämnda bågen, d.v.s. de är hörn i n-hörningen.



Med figurens beteckningar erhålles
$$a+b+c = \frac{360}{n}.$$
Men
$$b = \frac{360}{n+1}.$$
Alltså är
$$a < a + c = \frac{360}{n} - \frac{360}{n+1} = \frac{360}{n(n+1)}.$$

5. På det sätt som anges i figur 1 kan ett hörn C i triangeln ABC flyttas så att det hamnar i punkten C' på månghörningens omkrets. Eftersom $AC' + C'C > AC$ är omkretsen av den nya triangeln ABC' $>$ omkretsen av den ursprungliga triangeln ABC. På samma sätt kan de två övriga hörnen flyttas så att vi får en triangel $A'B'C'$ med hörnen på omkretsen av månghörningen (se figur 2). Den del av månghörningens omkrets som ligger mellan A' och B' är $\ge$ längden av sträckan $A'B'$. Analoga förhållanden gäller för $B'C'$ och $C'A'$. Månghörningens omkrets är alltså $\ge$ omkretsen av triangeln

$A'B'C'$ som i sin tur är $>$ den givna triangelns omkrets.

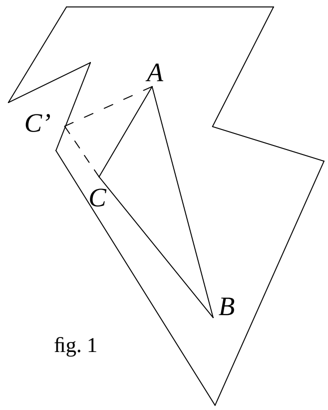


fig. 1

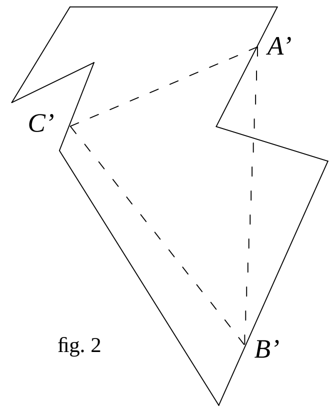
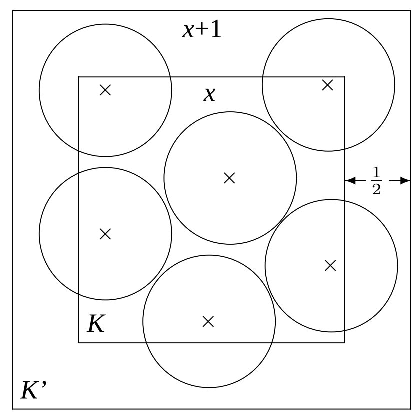


fig. 2

6. Låt K beteckna en kvadrat med sidan x (alla mått i cm) och K' den kvadrat med sidan $x+1$ som man får genom att utanför sidorna i K dra linjer parallella med K:s sidor på avståndet 1/2 från dessa (se figur 3).

fig. 3



Antag nu att man lyckats placera $f(x)$ punkter i det inre av K på ett sådant sätt att alla inbördes avstånd är ≥ 1. Rita med varje punkt som medelpunkt en cirkel med radien 1/2 (se figur 3). Man inser att det inte finns två av dessa cirklar som har någon inre punkt gemensam. Vidare ligger alla cirklarna innanför K'. Detta visar att $(x+1)^2$=ytan av $K' \geq$ sammanlagda ytan av alla cirklarna $= f(x) \cdot \pi/4$, varför

$$f(x) \leq \frac{4}{\pi}(x+1)^2.$$

Vi kan alltså välja $B = 4/\pi$ i den givna olikheten.

Antag fortfarande att $f(x)$ punkter är utplacerade i det inre av K med avstånd ≥ 1. Om cirklar med radie 1 dras med varje punkt som medelpunkt så måste hela K täckas, ty annars skulle det finnas plats för en punkt till. Alltså gäller

$$\pi \cdot 1^2 \cdot f(x) > x^2; \text{ d.v.s. } f(x) > x^2/\pi.$$

Vi kan alltså välja $A = 1/\pi$.

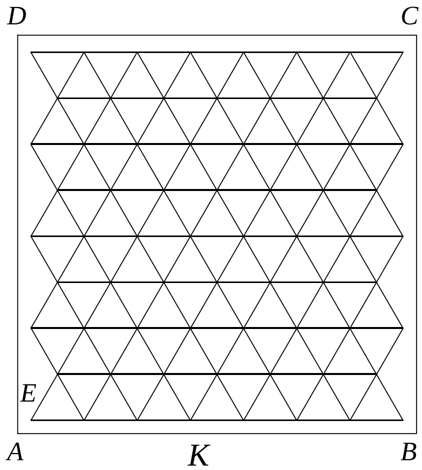
I själva verket kan man bevisa att den givna olikheten är riktig för $A = B = 2/\sqrt{3}$, vilket är de bästa möjliga värdena på konstanterna. Vi visar här endast att man kan välja $A = 2/\sqrt{3}$.

Vi placerar punkterna i hörnen av ett nät bestående av liksidiga trianglar med sidan 1 enligt figur 4. En sida i trianglarna väljes parallell med en sida i K. På detta sätt får vi ett antal horisontella punktrader som vi numrerar med 1, 2, 3, ... nedifrån räknat. Avståndet mellan två rader är $\sqrt{3}/2$. Härav följer att om

$$(p-1)\frac{\sqrt{3}}{2} < x \leq p\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad p \text{ naturligt tal,} \tag{1}$$

så kan vi placera in p rader, förutsatt att den understa lägges tillräckligt långt ner.

fig. 4



Vid beräkning av antalet punkter i raderna får vi skilja på rader med udda och jämnt nummer. Om det förutom (1) gäller att

$$(q-1)\frac{1}{2} < x \le q\frac{1}{2}, \qquad q \text{ naturligt tal,}$$

finner man, om man väljer den nedre vänstra punkten E i nätet tillräckligt nära hörnet A i kvadraten, följande resultat (h och k hela tal):

	$p = 2k,$ $q = 2h$	$p = 2k,$ $q = 2h+1$	$p = 2k+1,$ $q = 2h$	$p = 2k+1,$ $q = 2h+1$
Antal udda rader	k	k	$k+1$	$k+1$
Antal jämna rader	k	k	k	k
Antal punkter i en udda rad	h	$h+1$	h	$h+1$
Antal punkter i en jämn rad	h	h	h	h
Totala antalet punkter	$kh + kh$ $= pq/2$	$k(h+1)kh$ $= pq/2$	$(k+1)h + kh$ $= pq/2$	$(k+1)(h+1) + kh$ $= (pq+1)/2$

I samtliga fall är alltså antalet punkter $\geq pq/2$. Vi har därmed bevisat att

$$f(x) \geq \frac{pq}{2} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{3}} \cdot 2x = \frac{2}{\sqrt{3}} x^2,$$

d.v.s. att vi i den givna olikheten kan välja $A = 2/\sqrt{3}$.
Figuren har ritats för $x = 7,4$ varför $p = 9 = 2 \cdot 4 + 1$ och $q = 15 = 2 \cdot 7 + 1$. Alltså är $k = 4$ och $h = 7$.

Lösningarna hämtade, med Svenska Matematikersamfundets tillstånd och författarens medgivande, ur:

Tävlingsproblem i matematik
Skolornas matematiktävling 1961 – 1968
Problem och lösningar utgivna av Lars Inge Hedberg
på uppdrag av Svenska Matematikersamfundet