Skolornas Matematiktävling

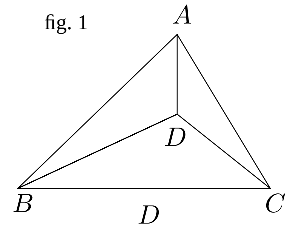
Svenska Dagbladet Svenska Matematikersamfundet

Lösningar till kvalificeringstävlingen den 17 oktober 1962

1. Vi betraktar triangeln ABC med hörn i tre av de givna punkterna och skiljer på olika fall beroende på läget av den fjärde punkten D.

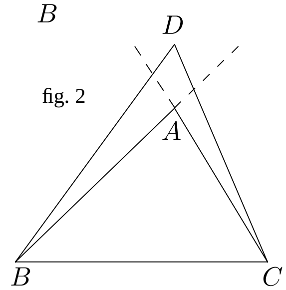
   Antag först att D ligger i det inre av triangeln ABC (fig. 1). Sammanbindes D med A, B och C, bildas vid D tre vinklar, vars summa är $360°$. Minst en av dessa vinklar är då $\geq 120°$, vilket medför att minst en av trianglarna med ett hörn i D har en icke spetsig vinkel.

   fig. 1

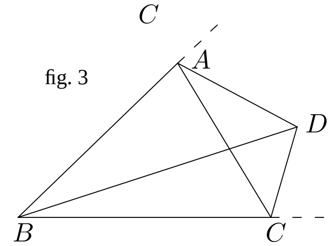
   Antag nu att D ligger utanför triangeln ABC. Om då D skulle ligga i ett vinkelfält bildat av sidornas förlängningar i ett hörn, t.ex. A, skulle A ligga inuti triangeln BCD (fig. 2), och vi vore tillbaka i det först behandlade fallet.

   fig. 2

   Återstående möjlighet är att D ligger i den del av planet som begränsas av en sida, t.ex. AC, och de två andras förlängningar (fig. 3). Detta innebär att diagonalerna i fyrhörningen $ABCD$ träffar varandra inuti fyrhörningen. Denna har vinkelsumman $360°$, varför minst en av dess vinklar är $\geq 90°$. Denna vinkels ben och motstående diagonal bildar en triangel med hörn i tre av de givna punkterna och med en icke spetsig vinkel. V.S.B.

   fig. 3

2. Det gäller att bestämma antalet dagar från den 17 oktober 1962 (exklusive) till den 17 oktober 3000 (inklusive) och undersöka vilken rest detta antal ger vid division med 7 (antalet dagar per vecka). Det sökta antalet dagar är 365 multiplicerat med ett, antal hela år, plus en dag för varje skottår. Antalet hela år är $3000 - 1962 = 1038$. Från och med år 1964 (första årtal delbart med 4) till och med år 2999 finns $1036/4 = 259$ årtal delbara med 4. Av dessa är 10 årtal delbara med 100, medan 3 årtal (2000, 2400 och 2800) dessutom är delbara med 400. Antalet skottår (år 3000 är ej skottår) blir då $259 - 10 + 3 = 252$. Det sökta antalet dagar är alltså

$$\begin{aligned} 365 \cdot 1038 + 252 &= (7 \cdot 52 + 1) \cdot 1038 + 7 \cdot 36 = 7 \cdot 52 \cdot 1038 + 1038 + 7 \cdot 36 \\ &= 7 \cdot 52 \cdot 1038 + 7 \cdot 148 + 2 + 7 \cdot 36 = 7(52 \cdot 1038 + 148 + 36) + 2. \end{aligned}$$

   Detta är ett antal hela veckor plus 2 dagar, vilket medför att den 17 oktober 3000 är en fredag.

3.

$$\sin z = -\sin x - \sin y \tag{1}$$

$$\cos z = -\cos x - \cos y \tag{2}$$

   Om (1) och (2) kvadreras och adderas fås

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 y + \cos^2 y + 2 \sin x \sin y + 2 \cos x \cos y = 2 + 2 \cos(x - y),$$

   d.v.s.

$$\cos(x - y) = -\frac{1}{2} \tag{3}$$

   Produktformler och (3) ger

$$\sin 2x + \sin 2y = 2 \sin(x + y) \cos(x - y) = -\sin(x + y) \tag{4}$$

$$\cos 2x + \cos 2y = 2 \cos(x + y) \cos(x - y) = -\cos(x + y) \tag{5}$$

Alltså gäller enligt (1), (2) och (4)

$$\begin{aligned}\sin 2z &= 2\sin z\cos z = 2(\sin x\cos x + \sin x\cos y + \cos x\sin y + \sin y\cos y)\\ &= \sin 2x + \sin 2y + 2\sin(x+y) = \sin 2x + \sin 2y - 2(\sin 2x + \sin 2y),\end{aligned}$$

d.v.s.

$$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 0.$$

Likaså ger (1), (2) och (5)

$$\begin{aligned}\cos 2z &= \cos^2 z - \sin^2 z = \cos^2 x + \cos^2 y + 2\cos x\cos y - \sin^2 x - \sin^2 y - 2\sin x\sin y\\ &= \cos 2x + \cos 2y + 2\cos(x+y) = \cos 2x + \cos 2y = -2(\cos 2x + \cos 2y),\end{aligned}$$

d.v.s.

$$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0.$$

V.S.B.

Ett alternativ är att ur (3) lösa ut

$$x - y = 120^\circ + n\cdot 360^\circ.$$

På motsvarande sätt får man (n, m och k är heltal)

$$y - z = 120^\circ + m\cdot 360^\circ$$

och

$$z - y = 120^\circ + k\cdot 360^\circ.$$

Två godtyckliga av vinklarna x, y och z skiljer sig därför med 120° (så när som på hela varv). Följande fall kan då inträffa (se fig. 4)

$$\begin{aligned}y &= x + 120^\circ + n_1\cdot 360^\circ\\ z &= x + 240^\circ + n_2\cdot 360^\circ\end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned}y &= x + 240^\circ + m_1\cdot 360^\circ\\ z &= x + 120^\circ + m_2\cdot 360^\circ\end{aligned}.$$

I båda fallen gäller då

$$\begin{aligned}\sin 2y + \sin 2z &= \sin(2x + 120^\circ) + \sin(2x + 240^\circ)\\ &= 2\sin(2x + 180^\circ)\cos 60^\circ\\ &= -\sin 2x.\end{aligned}$$

Analogt får man $\cos 2y + \cos 2z = -\cos 2z$, d.v.s. de två sökta relationerna har visats gälla.

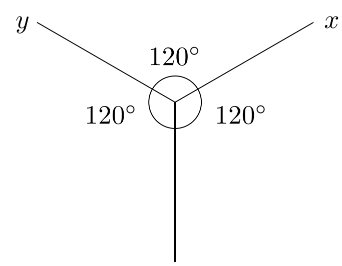
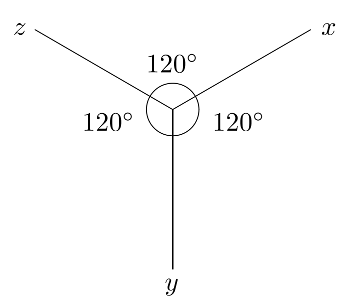


fig. 4



En tredje metod (som vi endast skisserar) är att betrakta triangeln med hörn $(\cos x, \sin x)$, $(\cos y, \sin y)$ och $(\cos z, \sin z)$ i ett rätvinkligt koordinatsystem. Villkoren (1) och (2) innebär att triangelns tyngdpunkt är origo, som också är omskrivna cirkelns medelpunkt. Då kan visas att triangeln är liksidig. Men då är också triangeln med hörnen $(\cos 2x, \sin 2x)$, $(\cos 2y, \sin 2y)$ och $(\cos 2z, \sin 2z)$ liksidig, varav följer att dess tyngdpunkt sammanfaller med omskrivna cirkelns medelpunkt, origo, vilket ger de två relationerna som skulle bevisas.

4. Låt v vara vinkeln mellan strandens riktning motströms och simmarens riktning (fig. 5). För att komma så högt. upp som möjligt längs floden får personen inte simma med strömmen, varför vi kan inskränka oss till vinklar i intervallet $0 < v \le \pi/2$.

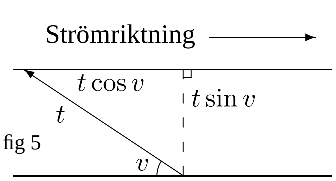


fig 5

På tiden t sek. simmar personen t meter. Efter denna tid befinner han sig på ett vinkelrätt avstånd av $t \sin v$ meter från stranden. Om inte strömmen hade varit, skulle han befinna sig $t \cos v$ meter högre upp längs floden än han startade. Men strömmen för honom på denna tid $2t$ meter i flodens riktning, och han kommer alltså i själva verket att vara $t(\cos v - 2)$ meter högre upp än startpunkten. (Eftersom $\cos v - 2$ är negativt, befinner han sig nedanför sin startpunkt.)
Om avståndet mellan stränderna är d meter, tar översimningen $d/\sin v$ sek. Han kommer alltså till andra stranden $(\cos v - 2) \cdot d/\sin v$ meter högre upp än han startade. Vi söker därför maximum av

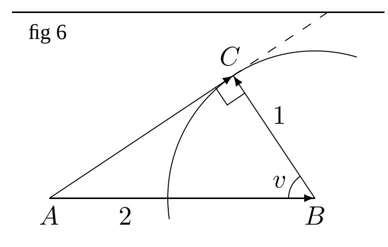
$$f(v) = (\cos v - 2)/\sin v \text{ för } 0 < v \leq \pi/2.$$

$$f'(v) = (2\cos v - 1)/\sin^2 v = 0 \text{ för } v = \pi/3.$$

För $0 < v < \pi/3$ är $f'(v) > 0$, d.v.s. $f(v)$ växande, och för $\pi/3 < v < \pi/2$ är $f'(v) < 0$, d.v.s. $f(v)$ avtagande. Alltså är $f(\pi/3)$ ett maximum av $f(v)$ för $0 < v \leq \pi/2$, d.v.s. $\pi/3$ eller $60°$ är den sökta vinkeln.

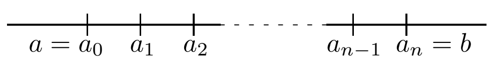
Problemet har även en enkel geometrisk lösning.
Man får simmarens verkliga hastighetsvektor genom att addera strömmens hastighet (vektorn AB i fig. 6) och simmarens hastighet relativt strömmen (vektorn BC i figuren). Simmarens hastighet är alltså vektorn AC. För att simmaren skall komma så högt upp som möjligt måste nu linjen AC tangera cirkeln kring B med radie 1 i C, d.v.s. BC och AC måste vara vinkelräta. Men då är ABC en halv liksidig triangel, och vinkeln v är därför $60°$.

fig 6



5. Låt a och b vara två olika rationella tal. Dela intervallet (a, b) i n lika stora delintervall (n är ett positivt heltal) med delningspunkterna (fig. 7)

fig 7



$$a_0 = a, a_1 = a + (b-a)/n, a_2 = a + 2(b-a)/n, \ldots, a_{n-1} = a + (n-1)(b-a)/n, a_n = b.$$

Då är alla talen a_0, a_1, ..., a_n rationella, och varje delintervalls längd $= (b-a)/n$.
Nu gäller för godtyckliga tal s_1, s_2, ..., s_n att

$$|s_1 + s_2 + \cdots + s_n| \leq |s_1| + |s_2| + \cdots + |s_n|.$$

På grund av villkoret i problemets lydelse blir då

$$\begin{aligned} |f(a) - f(b)| &= |f(a_0) - f(a_1) + f(a_1) - f(a_2) + \cdots + f(a_{n-1}) - f(a_n)| \\ &\leq |f(a_0) - f(a_1)| + |f(a_1) - f(a_2)| + \cdots + |f(a_{n-1} - f(a_n)| \\ &\leq 7(|a_0 - a_1|^2 + |a_1 - a_2|^2 + \cdots + |a_{n-1} - a_n|^2) \\ &= 7n\,((b-a)/n)^2 = 7(b-a)^2/n. \end{aligned}$$

Men n kan väljas godtyckligt stort, d.v.s. $f(a) - f(b)$ är godtyckligt litet, alltså $f(a) - f(b) = 0$. Då är för någon konstant C funktionen $f(x) = C$ för alla rationella x.
Låt nu x vara ett godtyckligt tal. Då finns det rationella tal hur nära x som helst; man kan t.ex. approximera x med ett decimalbråk med n decimaler, varvid alltså felet kan göras $< 10^{-n}$. Det finns alltså rationella tal r, så att $|x - r|$ kan göras godtyckligt litet. Då blir också $|f(x) - C| = |f(x) - f(r)| \leq 7|x - r|^2$ godtyckligt litet, d.v.s. $f(x) = C$.
Vi har alltså visat att $f(x) = C$ för alla x, där C är någon konstant. Omvänt inses omedelbart att för varje konstant C uppfyller $f(x) = C$ villkoret i problemets lydelse.
Svar: $f(x) = C$, där C är ett godtyckligt tal.

6. I. Vi betraktar $y = f(x) = \sqrt{1+x}$ mellan punkterna $A = (0,1)$ och $B = (3,2)$ (fig. 8, där kurvans krökning är överdriven för åskådlighets skull). AB har riktningskoefficienten 1/3, och $f'(x) = 1/(2\sqrt{1+x})$, varav följer att en tangent till $y = f(x)$, som är parallell med AB, tangerar kurvan i punkten $T = (5/4, 3/2)$. AB:s ekvation är $y = x/3 + 1$, och tangentens ekvation är $y = x/3 + 1 + 1/12$. Kurvbågen ATB ligger helt mellan den räta linjen AB och tangenten i T, ty den är konkav nedåt ($f''(x) < 0$ för $0 \le x \le 3$). En god approximation av $y = f(x)$ är då $y = L(x) = x/3 + 1 + 1/24$, som ligger mitt mellan AB och tangenten i T. Den största avvikelsen mellan $f(x)$ och $L(x)$ för $0 \le x \le 3$ är 1/24 vilket inträffar för $x = 0$, $x = 5/4$ och $x = 3$.

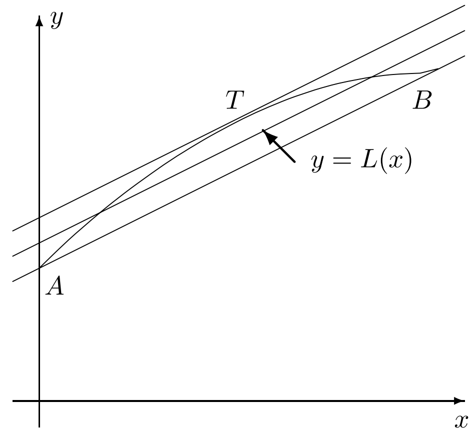
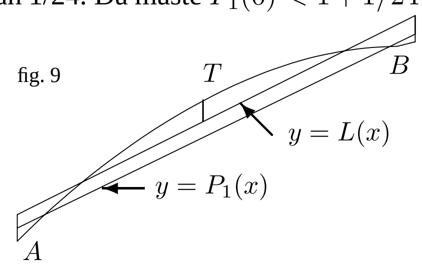


fig. 8

II. $L(x)$ är det förstagradspolynom som ger den bästa approximationen i den betydelsen att den maximala avvikelsen $|f(x) - P_1(x)|$ är så liten som möjligt. Ty antag att $P_1(x)$ vore ett förstagradspolynom som avviker från $f(x)$ för $0 \le x \le 3$ med mindre än 1/24. Då måste $P_1(0) < 1 + 1/24 = L(0)$ och $P_1(3) < 2 + 1/24 = L(3)$.

Men då måste (se fig. 9) räta linjen $y = P_1(x)$ ligga under räta linjen $y = L(x)$ i hela intervallet $0 \le x \le 3$. Speciellt måste gälla $P_1(5/4) < L(5/4)$ d.v.s. $f(5/4) - P_1(5/4) > f(5/4) - L(5/4) = 1/24$, vilket strider mot antagandet $|f(x) - P_1(x)| < 1/24$ för $0 \le x \le 3$, som alltså är falskt.

fig. 9


III. Den minsta maximala avvikelsen som man kan få vid approximation med ett förstagradspolynom är alltså 1/24. Vi vill visa att man kan finna andragradspolynom som ger bättre approximation. Vi skall studera ett speciellt andragradspolynom och uppskatta (ej bestämma) dess maximala avvikelse från $f(x)$.

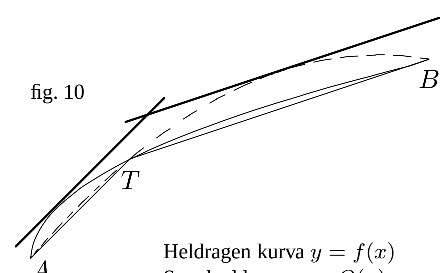
Vi bestämmer det polynom $y = Q(x) = ax^2 + bx + c$, d.v.s. den parabel med vertikal axel, som går genom punkterna A, T och B (fig. 10).

Polynomet blir då

$$y = Q(x) = -4x^2/105 + 47x/105 + 1.$$

Liksom $y = f(x)$ är $y = Q(x)$ konkav nedåt för $0 \le x \le 3$, d.v.s. kurvan ligger över sina kordor men under sina tangenter.

Kordan AT har ekvationen $y = 2x/5 + 1$. Den tangent till $y = f(x)$, som är parallell med AT, har ekvationen $y = 2x/15 + 1 + 1/40$ och den tangent till $y = Q(x)$, som är parallell med AT, har ekvationen $y = 2x/5 + 1 + 5/336$. Mellan A och T ligger alltså båda kurvorna mellan de räta linjerna $y = 2x/5 + 1$ och $y = 2x/5 + 1 + 1/40$, varför säkert $|f(x) - Q(x)| \le 1/40$ för $0 \le x \le 5/4$.

fig. 10


Heldragen kurva $y = f(x)$
Streckad kurva $y = Q(x)$

Kordan TB har ekvationen $y = 2x/7 + 1 + 1/7$. Den tangent till $y = f(x)$ resp. $y = Q(x)$, som är parallell med TB, har ekvationen $y = 2x/7 + 1 + 9/56$ resp. $y = 2x/7 + 1 + 289/1680$. Alltså gäller säkert $|f(x) - Q(x)| \le 289/1680 - 1/7 = 7/240$ för $5/4 \le x \le 3$.

Eftersom $1/40 < 7/240$ visar detta att $|f(x) - Q(x)| \le 7/240$ för $0 \le x \le 3$. Och eftersom $1/24 > 7/240$ ger andragradspolynornet $Q(x)$ en bättre approximation av $\sqrt{1+x}$ än varje förstagradspolynom i intervallet $0 \le x \le 3$.

Allmänt kan visas att varje kontinuerlig funktion i ett intervall $a \le x \le b$ kan approximeras godtyckligt nära av polynom bara man väljer polynomets gradtal tillräckligt stort. D.v.s. att till varje $\varepsilon > 0$ finns ett polynom $P(x)$ av någon grad n, så att $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ för $a \leq x \leq b$.

Lösningarna hämtade, med Svenska Matematikersamfundets tillstånd och författarens medgivande, ur:

Tävlingsproblem i matematik
Skolornas matematiktävling 1961 – 1968
Problem och lösningar utgivna av Lars Inge Hedberg
på uppdrag av Svenska Matematikersamfundet