XIII:e NORDISKA MATEMATIKTÄVLINGEN

12 april 1999

Skrivtid: 4 tim
Varje problem ger maximalt 5 poäng.

Problem 1

Funktionen f är definierad för icke-negativa heltal och uppfyller

$$f(n) = \begin{cases} f(f(n+11)), & \text{om } n \leq 1999 \\ n-5, & \text{om } n > 1999. \end{cases}$$

Bestäm alla lösningar till ekvationen $f(n) = 1999$.

Problem 2

En heptagon (= sjuhörning), vars alla sidor är olika, är inskriven i en cirkel. Hur många vinklar av storlek $120°$ kan en sådan heptagon maximalt ha?

Problem 3

Det oändliga planet av gitterpunkter $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}=\mathbf{Z}^2$ består av mängden av alla par (x, y), där x och y är heltal. Låt a och b vara icke-negativa heltal. En s.k. knektvandring av (a, b)-typ i det oändliga planet av gitterpunkter är en vandring där de enda tillåtna stegen från en punkt (x, y) går till någon av punkterna $(x \pm a, y \pm b)$ och $(x \pm b, y \pm a)$. Bestäm alla värden på a och b sådana att varje gitterpunkt kan nås genom en knektvandring av (a, b)-typ.

Problem 4

Låt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vara positiva reella tal, $n \geq 1$. Visa att

$$n\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq \left(\frac{1}{1+a_1} + \cdots + \frac{1}{1+a_n}\right)\left(n + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right).$$

När gäller likhet?