

Lösning till problem augusti 1999

Systemet är ekvivalent med

$$\begin{cases} 2x - y = a \\ 5y^2 - (2x - y)^2 = 4b \end{cases} \text{ eller } \begin{cases} x = \frac{y + a}{2} \\ 5y^2 = a^2 + 4b \end{cases} .$$

Antag nu att $y = \frac{p}{q}$ med p och $q > 0$ relativt prima heltal. Då ger den sista ekvationen $5p^2 = (a^2 + 4b)q^2$.

Här finns ett udda antal primfaktorer 5 i vänsterledet och då måste $a^2 + 4b$ också innehålla ett udda antal faktorer 5. Det betyder att p^2 är en heltalsmultipel av q^2 , som ger att $q = 1$ och att y är ett heltal. Nu ger den sista ekvationen i systemet att $y^2 - a^2 = (y - a)(y + a)$ är delbart med 2. Men då $y - a$ och $y + a$ är jämna samtidigt är $y + a$ delbart med 2, och alltså är x också ett heltal.