Lösning till problem juli 2000

För $n = 2$ gäller likhet mellan leden (Pythagoras sats). För $n = 1$ gäller $a + b > c$ (triangelolikheten).
Låt $n \geq 3$ vara ett heltal. Enligt binomialteoremet och olikheten mellan aritmetiskt och geometrisk medium är för $a > 0$ och $b > 0$

$$\begin{aligned} c^{2n} &= (a^2 + b^2)^n \geq a^{2n} + n(a^{2n-2}b^2 + a^2b^{2n-2}) + b^{2n} \\ &= a^{2n} + na^2b^2(a^{2n-4} + b^{2n-4}) + b^{2n} \\ &\geq a^{2n} + 2na^2b^2\sqrt{a^{2n-4}b^{2n-4}} + b^{2n} \\ &> a^{2n} + 2a^nb^n + b^{2n} = (a^n + b^n)^2 \end{aligned}$$

varav $a^n + b^n < c^n$.

Svar: Olikheten $a^n + b^n < c^n$ gäller för alla heltal $n > 2$