Lösning till problem oktober 2000

Med induktion visar man att största värdet antas för permutationen $(n, n-1, \ldots, 1)$.
Start: För $n = 1$ är summan 0 och för $n = 2$ är summan 0 för den identiska permutaionen och 2 för permutationen (2,1). Påståendet är alltså riktigt för dessa värden på n.
Induktionssteg: Antag att $n \geq 3$ och att påståendet är sant för alla i med $1 \leq i < n$. Antag att permutationen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ger det maximala värdet. Om $a_k = n$ och $k \neq 1$ låter vi a_1 och a_k byta plats. Om

$$S = |a_1 - 1| + \cdots + |a_k - k| + \cdots + |a_n - n| \text{ och } S^* = |a_k - 1| + \cdots + |a_1 - k| + \cdots + |a_n - n|,$$

så är

$$S^* - S = |a_k - 1| + |a_1 - k| - |a_1 - 1| - |a_k - k| = n - 1 + |a_1 - k| - a_1 + 1 - n + k = |a_1 - k| - (a_1 - k) \geq 0.$$

Alltså ger även den nya permutationen det största värdet.
Antag nu att $a_j = 1$ och $j \neq n$. Byte av a_j och a_n ger

$$S = |a_1 - 1| + \cdots + |a_j - j| + \cdots + |a_n - n| \text{ och } S^* = |a_1 - 1| + \cdots + |a_n - j| + \cdots + |a_j - n|,$$

och

$$S^* - S = |a_n - j| + |a_j - n| - |a_j - j| - |a_n - n| = |a_n - j| - 1 + n + 1 - j + a_n - n = |a_n - j| + a_n - j \geq 0.$$

Vi kan alltså anta att $a_1 = n$ och $a_n = 1$. Då får summan utseendet

$$S = |n - 1| + |a_2 - 1 - 1| + |a_3 - 1 - 2| + \cdots + |a_{n-1} - 1 - (n-2)| + |1 - n|.$$

Nu är $(a_2 - 1, a_3 - 1, \ldots, a_{n-1} - 1)$ en permutation av $(1, 2, \ldots n - 2)$ som ger maximalt värde och enligt induktionsantagandet kan vi anta att $a_2 - 1 = n - 2, a_3 - 1 = n - 3, \ldots, a_{n-1} - 1 = 1$. Alltså gäller påståendet också för n.
Slutsats: Enligt induktionsprincipen gäller påståendet för alla $n \geq 1$.
Det återstår att beräkna summan

$$2\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}(n - 2k + 1) = 2\frac{\left(n - 1 + n - 2\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)\left[\frac{n}{2}\right]}{2} = 2\left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right)\left[\frac{n}{2}\right] = 2\left[\frac{n^2}{2}\right].$$

Svar: Största värdet $\left[\frac{n^2}{2}\right]$ antas bl a vid permutationen $(n, n-1, \ldots, 1)$.