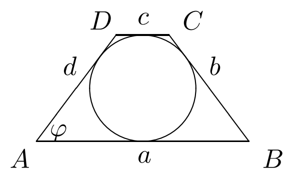
# Lösning till problemet augusti 2001

Låt fyrhörningen vara $ABCD$ med $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$ och $\varphi = \angle DAB$.




Eftersom fyrhörningen är inskriven i en cirkel är $\pi - \varphi = \angle BCD$. Cosinusteoremet på trianglarna $\triangle ABD$ och $\triangle CDB$ ger då

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\varphi = |BD|^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\varphi$$

dvs

$$2(ad + bc)\cos\varphi = a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = (a-d)^2 + 2ad - (b-c)^2 - 2bc.$$

Men då en cirkel kan inskrivas i fyrhörningen gäller också $a + c = b + d$ eller $a - d = b - c$ och alltså är $(ad + bc)\cos\varphi = ad - bc$, varav

$$\sin^2\varphi = \frac{(ad+bc)^2 - (ad-bc)^2}{(ad+bc)^2} = \frac{4adbc}{(ad+bc)^2}.$$

Arean blir då

$$\frac{ad+bc}{2}\sin\varphi = \sqrt{abcd}.$$

**Svar**: Arean är $\sqrt{abcd}$.