Lösning till problemet januari 2001

Det räcker att visa att det finns naturliga tal n och k sådana att

$$2001 \cdot 10^k \leq 2^n < 2002 \cdot 10^k \qquad \text{eller} \qquad \lg 2001 \leq n \lg 2 - k < \lg 2002.$$

Välj ett positivt heltal N sådant att $1/N < \lg 2002 - \lg 2001$ ($N > 4608$) och dela in enhetsintervallet $[0, 1[$ i N lika delar. Betrakta följden $a_j = j \lg 2 - [j \lg 2]$, $j = 1, 2, \ldots, N+1$. Enligt lådprincipen ligger minst två olika element, a_ν och a_μ med $\mu > \nu$, i samma delintervall $[(i-1)/N, i/N[$. Då är

$$-\frac{1}{N} < a_\mu - a_\nu = (\mu - \nu) \lg 2 - ([\mu \lg 2] - [\nu \lg 2]) < \frac{1}{N},$$

dvs $(\mu - \nu) \lg 2 = m + \Delta$, där m är ett naturligt tal och $|\Delta| < 1/N$.
Heltalet m måste vara ganska stort. För $0 \leq m \leq 3$ är

$$\frac{2^{3m+1}}{10^m} \geq \frac{2^{10}}{10^3} = \frac{1024}{1000} = 1 + \frac{24}{1000} > 1 + \frac{1}{2001} = \frac{2002}{2001},$$

varav $(3m+1) \lg 2 - m > \lg \dfrac{2002}{2001} > 1/N$, som ger $(\mu - \nu) \leq 3m$. Dessutom följer, med $m = 0$, att $(\mu - \nu) \lg 2 \geq \lg 2 > 1/N$. Alltså är $m \geq 1$. Men för $m \geq 1$ är

$$\frac{2^{3m}}{10^m} \leq \frac{8}{10} = 1 - \frac{2}{10} < 1 - \frac{1}{2002} = \frac{2001}{2002},$$

varav $(\mu - \nu) \lg 2 - m \leq 3m \lg 2 - m < \lg \dfrac{2001}{2002} < -1/N$. Alltså gäller $m \geq 4$.
Då $\lg 2$ inte är rationellt är $\Delta \neq 0$.
Om $\Delta > 0$ välj ett positivt heltal r så att $\lg 2001 \leq r\Delta < \lg 2002$. Då gäller

$$\lg 2001 \leq r\Delta = r(\mu - \nu) \lg 2 - rm < \lg 2002.$$

Sätt $n = r(\mu - \nu)$ och $k = rm$.

Om $\Delta < 0$, välja det positiva heltalet r så att $\lg 2001 \leq 4 + r\Delta < \lg 2002$. Detta är möjligt eftersom lg2002 <lg$10^4 = 4$. Då gäller

$$\lg 2001 \leq r(\mu - \nu) \lg 2 - (rm - 4) < \lg 2002.$$

Här kan man sätta $n = r(\mu - \nu)$ och $k = rm - 4 \geq m - 4 \geq 0$.

Svar: Ja det finns 2-potenser vars första siffror i decimalsystemet är 2001