Lösning till problemet juni 2002

Substitutionen $t = x + \dfrac{1}{x}$ överför ekvationen $\quad x^2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2} + a\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + b\right) = 0 \quad$ i ekvationen $t^2 + at + b - 2 = 0$. Av olikheten $|t| = \left|x + \dfrac{1}{x}\right| \geq 2$ följer att x är en reell rot till den givna ekvationen då och endast då t är en reell rot till ekvationen $t^2 + at + b - 2 = 0$ och $|t| \geq 2$. Ekvationen $t^2 + at + b - 2 = 0$ har de reella rötterna

$$t_{\max} = -\frac{1}{2}\left(a - \sqrt{8 - 4b + a^2}\right) \quad \text{och} \quad t_{\min} = -\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{8 - 4b + a^2}\right)$$

om och endast om $4b \leq 8 + a^2$ och ekvationen $x^2 - tx + 1 = 0$ har två olika rötter $x = \dfrac{1}{2}\left(t + \sqrt{t^2 - 4}\right)$ om och endast om $|t| > 2$.
Problemet är därmed reducerat till att bestämma de områden i ab-planet där $4b \leq 8 + a^2$ och där $t_{\max}$ och $t_{\min}$ är < -2, $= -2$, > -2 men < 2, $= 2$ respektive > 2.
Eftersom x är en reell rot till ekvationen $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ då och endast då $-x$ är en reell rot till ekvationen $x^4 - ax^3 + bx^2 - ax + 1 = 0$ räcker det att studera det högra halvplanet $a \geq 0$.
Antag därför att $a \geq 0$ och att $4b \leq 8 + a^2$. Då gäller

$$\begin{aligned}
t_{\max} < -2 \quad &\Leftrightarrow \quad a - 4 > \sqrt{8 - 4b + a^2} \Leftrightarrow a > 4 \text{ och } (a-4)^2 > 8 - 4b + a^2 \Leftrightarrow \\
&\qquad a > 4 \text{ och } b > 2a - 2 \\
t_{\max} = -2 \quad &\Leftrightarrow \quad a - 4 = \sqrt{8 - 4b + a^2} \Leftrightarrow a \geq 4 \text{ och } (a-4)^2 = 8 - 4b + a^2 \Leftrightarrow \\
&\qquad a \geq 4 \text{ och } b = 2a - 2 \\
t_{\max} > 2 \quad &\Leftrightarrow \quad a + 4 < \sqrt{8 - 4b + a^2} \Leftrightarrow (a+4)^2 < 8 - 4b + a^2 \Leftrightarrow \\
&\qquad b < -2a - 2 \\
t_{\max} = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad a + 4 = \sqrt{8 - 4b + a^2} \Leftrightarrow (a+4)^2 = 8 - 4b + a^2 \Leftrightarrow \\
&\qquad b = -2a - 2 \\
t_{\min} < -2 \quad &\Leftrightarrow \quad 4 - a < \sqrt{8 - 4b + a^2} \Leftrightarrow a > 4 \text{ eller } (4-a)^2 < 8 - 4b + a^2 \Leftrightarrow \\
&\qquad a > 4 \text{ eller } b < 2a - 2 \\
t_{\min} = -2 \quad &\Leftrightarrow \quad 4 - a = \sqrt{8 - 4b + a^2} \Leftrightarrow a \leq 4 \text{ och } (4-a)^2 = 8 - 4b + a^2 \Leftrightarrow \\
&\qquad a \geq 4 \text{ och } b = 2a - 2 \\
t_{\min} \leq 0 \quad &\Leftarrow \quad a \geq 0 \text{ och } 4b \leq 8 + a^2
\end{aligned}$$

I området $\left\{(a,b) \ : \ 2a - 2 < b \leq 2 + \dfrac{a^2}{4}, 0 \leq a \leq 4\right\}$ är $-2 < t_{\min} < t_{\max} < 2$, och där saknar den ursprungliga ekvationen reella rötter. I det resterande området är $t_{\min} \leq -2$ och den ursprungliga ekvationen har minst en reell rot.
En rot är möjlig då $t_{\min} = t_{\max} = -2$, som inträffar då $a = 4$ och $b = 2 + \dfrac{a^2}{4} = 6$ eller då $t_{\min} = -2$ och $-2 < t_{\max} < 2$ som gäller då $b = 2a - 2$, $0 < a < 4$.
Två reella rötter får man då $t_{\min} = t_{\max} \neq -2$ eller då $t_{\min} = -2$ och $t_{\max} = 2$ eller då $t_{\min} < -2$ och $-2 < t_{\max} < 2$ som ger upphov till mängderna $\left\{(a,b) \ : \ b = 2 + \dfrac{a^2}{4}, a > 4\right\}$, $\{(0,-2)\}$ och $\{(a,b) \ : 2a - 2 < b < 2a - 2\}$.
Tre rötter svarar mot $t_{\min} < t_{\max} = -2$ eller $t_{\min} < -2 < t_{\max} = 2$ dvs. $b = 2a - 2$, $a > 4$ respektive

$b = -2a - 2,\ a > 0$.

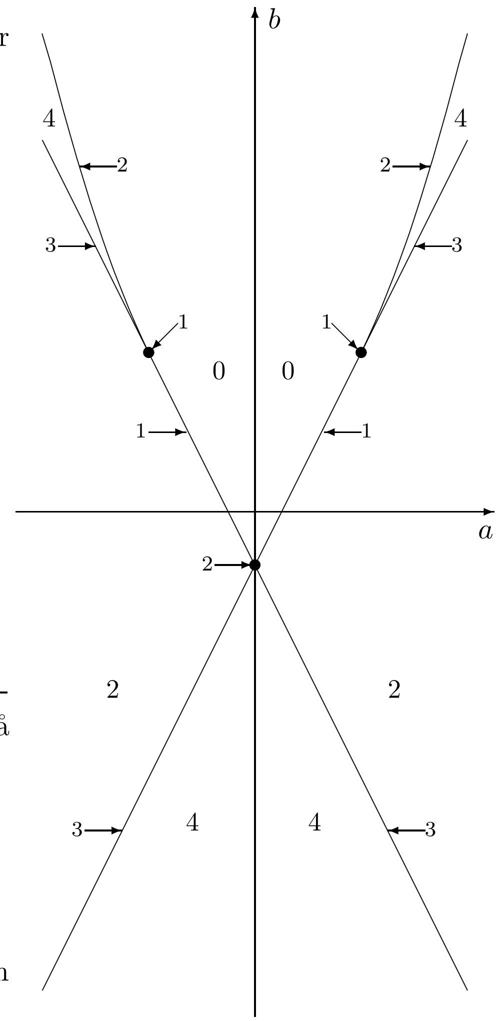
Slutligen får man 4 rötter då $2a - 2 < b < 2 + \dfrac{a^2}{4},\ a > 4$ eller då $b < -2a - 2,\ a \geq 0$.

Svar:Låt $A_k,\ k = 0, 1, 2, 3, 4$, vara det område i ab-planet där ekvationen

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

har precis k olika reella rötter. Då gäller:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \{(a,b)\ :\ 4b > 8 + a^2\} \cup \\
& \{(a,b)\ :\ b > 2|a| - 2,\ |a| < 4\} \\
A_1 &= \{(a,b)\ :\ b = 2|a| - 2,\ 0 < |a| \leq 4\} \\
A_2 &= \{(a,b)\ :\ 4b = 8 + a^2,\ |a| > 4\} \cup \{(0,-2)\} \cup \\
& \{(a,b)\ :\ -2|a| - 2 < b < 2|a| - 2\} \\
A_3 &= \{(a,b)\ :\ b = -2|a| - 2,\ a \neq 0\} \cup \\
& \{(a,b)\ :\ b = 2|a| - 2,\ |a| > 4\} \\
A_4 &= \{(a,b)\ :\ 8|a| - 8 < 4b < 8 + a^2,\ |a| > 4\} \cup \\
& \{(a,b)\ :\ b < -2|a| - 2\}
\end{aligned}$$



Det kan vara illustrativt att faktorisera den ursprungliga ekvationen i de fall då (a,b) ligger på parabel $4b = 8 + a^2$ eller på linjen $b = 2a - 2$

Då $4b = 8 + a^2$ kan ekvationen skrivas

$$\left(\left(x + \frac{a}{4}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{16} - 1\right)\right)^2 = 0$$

där brottpunkterna med $|a| = 4$ skiljer på fallen ingen rot, en rot, respektive 2 olika rötter.

På linjen $b = 2a - 2$ får man

$$(x+1)^2\left(\left(x + \frac{a-2}{2}\right)^2 - \frac{a(a-4)}{4}\right) = 0$$

där valen $a < 0$, $a = 0$, $0 < a < 4$, $a = 4$ och $a > 4$ ger 3, 2, 1, 1 respektive 3 olika reella rötter.