Lösning till problemet februari 2003

För $m \geq 1$ är $m \leq \left[\sqrt{k}\right] < m+1$ ekvivalent med $m^2 \leq k < (m+1)^2$. I intervallet $[m^2, (m+1)^2)$ finns precis $(m+1)^2 - m^2 = 2m+1$ heltal. Detta ger

$$\sum_{k=m^2}^{(m+1)^2-1} \left[\sqrt{k}\right] = m(2m+1) \quad \text{och} \quad \sum_{k=1}^{n^2-1} \left[\sqrt{k}\right] = \sum_{m=1}^{n-1} (2m^2+m).$$

För att bestämma denna summa kan man använda exempelvis differensmetoden, dvs bestämma ett polynom, av grad 3, $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, sådant att $p(x+1) - p(x) = 2x^2 + x$. Detta ger

$$a\left((x+1)^3 - x^3\right) + b\left((x+1)^2 - x^2\right) + c(x+1-x) = 2x^2 + x,$$

eller

$$(3a-2)x^2 + (3a+2b-1)x + a + b + c = 0$$

för alla x. Alltså är

$$a = \frac{2}{3}, \quad b = -\frac{1}{2}, c = -\frac{1}{6} \quad \text{och} \quad p(x) = \frac{4x^3 - 3x^2 - x}{6} = \frac{x(x-1)(4x+1)}{6},$$

varav

$$\sum_{m=1}^{n-1} (2m^2+m) = \sum_{m=1}^{n-1} (p(m+1) - p(m)) = p(n) - p(1) = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}.$$

Svar: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2-1} \left[\sqrt{k}\right] = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$