Lösning till problemet maj 2003

Låt g vara funktionen

$$g(x) = \begin{cases} 2bx, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ b + (1-b)(2x-1), & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases} .$$

Observera först att

$$g(x) - x = \begin{cases} (2b-1)x, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ (2b-1)(1-x), & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases} ,$$

dvs. $g(x) - x \ge 0$ i intervallet $[0,1]$ med likhet då och endast då $x = 0$ eller $x = 1$. Därför om $g(x) \le f(x)$ i $[0,1]$ så följer att $0 < g(x) - x \le f(x) - x$ för $0 < x < 1$.

Insätting av $x = 0$ i $f(x) = bf(2x)$ ger $f(0) = 0$, medan $x = 1$ och $x = \frac{1}{2}$ i $f(x) = b + (1-b)f(2x-1)$ ger $f(1) = 1$ resp. $f\left(\frac{1}{2}\right) = b$.

Låt $n \ge 1$ vara ett heltal och låt P_n vara påståendet:

$$P_n : \quad x = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2^i}, \quad a_i \in \{0,1\}, i = 1,2,\ldots,n \quad \Rightarrow g(x) \le f(x) \le \sum_{i=1}^{n} a_i b^i.$$

Att P_1 är sann följer av $g(0) = f(0) = 0$ och $g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = b$.

Antag då att $n \ge 1$ och att P_n är sann och låt

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{2^i} = \frac{a_1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n+1} \frac{a_i}{2^{i-1}} = \frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}\, y, \quad a_i \in \{0,1\}, i = 1,2,\ldots,n+1.$$

Om $a_1 = 0$ är $y = 2x < 1$ och av induktionsantagandet följer att

$$f(x) - g(x) = f\left(\frac{1}{2}\, y\right) - 2bx = bf(y) - by \ge b(g(y) - y) \ge 0$$

och

$$f(x) = f\left(\frac{1}{2}\, y\right) = bf(y) \le b \sum_{i=2}^{n+1} a_i b^{i-1} = a_1 b + \sum_{i=2}^{n+1} a_i b^i.$$

Om $a_1 = 1$ är $0 \le y = 2x - 1$ och av induktionsantagandet följer att

$$f(x) - g(x) = (1-b)f(2x-1) - (1-b)(2x-1) = (1-b)(f(y) - y) \ge (1-b)(g(y) - y) \ge 0$$

och

$$f(x) = b + (1-b)f(2x-1) = a_1 b + (1-b)f(y) \le a_1 b + bf(y) \le a_1 b + \sum_{i=2}^{n+1} a_i b^i.$$

Alltså gäller $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ och av induktionsprincipen följer att P_n är sann för alla $n \ge 1$.

För varje $x \in [0,1]$ kan man nu välja en följd $x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i(n)}{2^i}, \quad a_i(n) \in \{0,1\}, i = 1,2,\ldots,n$, sådan att $x_n \to x$ då $n \to \infty$. Av kontinuiteten följer då att

$$f(x) - g(x) = \lim_{n\to\infty} (f(x_n) - g(x_n)) \ge 0.$$

Dessutom är

$$f(x_n) - x_n \leq \sum_{i=1}^{n} a_i(n) \left(b^i - \frac{1}{2^i} \right) < \sum_{i=1}^{\infty} \left(b^i - \frac{1}{2^i} \right) = \frac{b}{1-b} - 1 = \frac{2b-1}{1-b} = c.$$

Av kontinuteten hos f följer att $f(x) - x \leq c$ för alla $x \in [0, 1]$.
För $0 < x < 1$ gäller alltså

$$0 < g(x) - x \leq f(x) - x \leq c.$$