Lösning till problemet juni 2004

Om det finns p_k pojkar och f_k flickor i klass k, $k = 1, 2$, så är $p_1 + p_2 = f_1 + f_2$. Antalet matcher som flickorna i klass 1 spelat mot pojkarna i klass 2 är $15 = f_1 p_2$. Av detta följer bl.a. att $p_2 \geq 1$. Antalet matcher som pojkarna i klass 1 spelat är

$$25 = p_1(p_2 + f_1 + f_2) + \frac{p_1(p_1 - 1)}{2} = p_1(p_1 + 2p_2) + \frac{p_1(p_1 - 1)}{2}.$$

Det framgå r av denna relation att $p_1 \geq 1$. Omskrivning ger

$$50 = 2p_1^2 + 4p_1 p_2 + p_1^2 - p_1.$$

Eftersom $4p_1 p_2 > 0$ och $p_1^2 - p_1 \geq 0$ följer att $50 > 2p_1^2$, varav $p_1 < 5$. Relationen kan också skrivas

$$p_1(3p_1 + 4p_2 - 1) = 50 = 2 \cdot 5 \cdot 5.$$

Faktorn p_1 i vänsterledet må ste vara en faktor i högerledet. Villkoret $1 \leq p_1 < 5$ ger $p_1 = 1$ eller $p_1 = 2$. Valet $p_1 = 1$ ger $4p_2 + 2 = 50$, dvs $p_2 = 12$. Men ekvationen $15 = f_1 \cdot 12$ saknar heltalslösning. Valet $p_1 = 2$ ger $4p_2 + 5 = 25$, $p_2 = 5$, $15 = f_1 \cdot 5$, $f_1 = 3$ och $2 + 5 = p_1 + p_2 = f_1 + f_2 = 3 + f_2$, $f_2 = 4$.

Svar:

Klass	1	2
Flickor	3	4
Pojkar	2	5