

Lösning till problemet februari 2005

Antag att det inte finns någon sådan sträcka. För $n = 1, 2, \dots, 5$ gäller då att n och $n + 10$ har olika färg, annars ger $n, n + 5$ och $n + 10$ en sträcka av sökt slag. De tre första talen har inte samma färg. Tag nu $1 \leq a < b \leq 3$ så att a och b har samma färg. Enligt antagandet har då $c = 2b - a \leq 5$ inte samma färg som a och b . Men då har $c + 10$ och a och $b + 5$ samma färg och $\frac{1}{2}(c + 10 + a) = b + 5$ vilket strider mot antagandet.

Förutsättningen att n och $n + 5$ har samma färg för $n = 1, 2, \dots, 5$ är i själva verket överflödigt. Man kan finna en sträcka med likafärgade ändpunkter och mittpunkt bland de nio första heltalen utan något villkor på färgläggningen.

Det är ingen inskränkning att anta att av talen 1, 2, 3, 4 och 5 de flesta är svarta. Då finns för de fem första talen följande 16 möjligheter:

	1	2	3	4	5
1	●	●	●	●	●
2	○	●	●	●	●
3	●	○	●	●	●
4	●	●	○	●	●
5	●	●	●	○	●
6	●	●	●	●	○
7	○	○	●	●	●
8	○	●	○	●	●

	1	2	3	4	5
9	○	●	●	○	●
10	○	●	●	●	○
11	●	○	○	●	●
12	●	○	●	○	●
13	●	○	●	●	○
14	●	●	○	○	●
15	●	●	○	●	○
16	●	●	●	○	○

I åtta av dessa fall finns tre på varandra följande svarta punkter nämligen i raderna 1,2,3,5,6,7,10,16. Dessa tre punkter ger då en sträcka där ändpunkter och mittpunkter är svarta. I rad 12 är punkterna 1, 3 och 5 svarta, vilket också ger en sträcka med den efterfrågade egenskapen.

Om i de de övriga sju fallen $c = 2b - a$, där $a < b \leq 5$ är svarta, också är svart har vi bland de nio första färgade talen funnit en sträcka med svarta ändpunkter och mittpunkt.

Vi kompletterar därför tabellen i dessa sju fall så att $c = 2b - a$ är vit om $a < b \leq 5$ är svarta.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	●	●	○	●	●	○	○		○
8	○	●	○	●	●	○		○	
9	○	●	●	○	●		○	○	
11	●	○	○	●	●	○	○		○
13	●	○	●	●	○		○		
14	●	●	○	○	●			○	○
15	●	●	○	●	○	○	○		

I denna tabell finns i raderna med ursprunglig numrering 4 resp. 11 en sträcka (3,9) med vita ändpunkter och mittpunkt. I rad 9 har sträckan (1,7) samma egenskap och det samma gäller sträckan (5,7) i rad 15.

Om punkt 6 i rad 13 är vit har sträckan (5,7) vita punkter. Om punkt 7 är vit har sträckan (6,8) i rad 8 och sträckan (7,9) i rad 14 vita punkter.

Betrakta därför fallen

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	○	●	○	●	●	○	●	○	
13	●	○	●	●	○	●	○		
14	●	●	○	○	●		●	○	○

I rad 8 är antingen (3,6,9) vita eller (5,7,9) svarta.

I rad 13 är antingen (2,5,8) vita eller (4,6,8) svarta.

I rad 14 slutligen är antingen (4,6,8) vita eller (5,6,7) svarta.