Lösningar till TMA 290, Mat Stat, 060308

1. För vänsterledet fås

$$Var\left(\frac{X}{\sigma_X}-\frac{Y}{\sigma_Y}\right)=Var\left(\frac{X}{\sigma_X}\right)+Var\left(\frac{Y}{\sigma_Y}\right)-2Cov(\frac{X}{\sigma_X},\frac{Y}{\sigma_Y})=\{\text{oberoende}\}$$

$$Var\left(\frac{X}{\sigma_X}\right)+Var\left(\frac{Y}{\sigma_Y}\right)=\frac{Var(X)}{\sigma_X^2}+\frac{Var(Y)}{\sigma_Y^2}=2$$

och för högerledets täljare

$$Var\,(X-Y)=Var(X)+Var(Y)-2Cov(X,Y)=\{\text{oberoende}\}$$

$$=Var(X)+Var(Y)=\sigma_X^2+\sigma_Y^2$$

Då har vi att

$$2\leq\frac{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}{\sigma_X\sigma_Y}\Leftrightarrow 0\leq(\sigma_X-\sigma_Y)^2$$

oc vi är klara.

2. Att $f_X(x)$ är en täthet innebär bl a att $\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)dx=1$. I vårt fall skall det således gälla att $\int_1^{10}\frac{K}{x^2}dx=1$. Det följer att K=10/9 och därmed $f_X(x)=\frac{10}{9x^2}$, $1\leq x\leq 10$. Väntevärdet blir således $\int_1^{10}\frac{10x}{9x^2}dx=\frac{10}{9}\int_1^{10}\frac{1}{x}dx=\frac{10}{9}\ln 10$ och variansen

$$Var(X)=\mathbb{E}[X^2]-(\mathbb{E}[X])^2=\frac{10}{9}\int_1^{10}\frac{x^2}{x^2}dx-(\frac{10}{9}\ln 10)^2=$$

$$\int_1^{10}dx-(\frac{10}{9}\ln 10)^2=9-(\frac{10}{9}\ln 10)^2.$$

3. Enligt ledning på baksidan gäller $\mathbb{E}[X_i]=\lambda$, så

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m X_i\right]=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m\mathbb{E}[X_i]=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m\lambda=\lambda$$

4. Enligt additionsformeln gäller

$$\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B).$$

Om händelserna är disjunkta har vi $\mathbb{P}(A\cap B)=0$ oc därmed skulle det gälla att $0.7=0.9$ vilket ju är absurdt! Händelserna är alltså inte disjunkta. Om händelserna är oberoende gäller $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)=0.2$. Då ger additionsformeln $0.7=0.7$, vilket ju är sant. Händelserna är alltså oberoende.

5. Se boken sid 270-271.

6. Se boken Kap 10.

7. Se exempel 8.5.5 sid 279-280 och använd $t_{0.025,9} = 2.262$ och $n = 10$ istället för den kavantil och det n som används i exemplet.

8.

$$0 \leq Var\left(\frac{X}{\sigma_X} \pm \frac{Y}{\sigma_Y}\right) = \text{se uppgift } 1 = 2 \pm 2Cov(X,Y)$$

$$\Leftrightarrow |\rho_{XY}| = \left|\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}\right| \leq 1.$$