

Lösningar till uppgifter från Milton-Arnold, kap 6

Matematisk statistik

6.6 Luftkvalitet bestäms av mängden partiklar i luften [$\mu\text{g}/\text{m}^3$]. Antag att denna mängd X har (okänt) väntevärde μ och okänd standardavvikelse σ . Det vill säga, om X är resultatet vid ett måttillfälle är $E[X] = \mu$ och $\text{Var}(X) = \sigma^2$. Låt X_1, \dots, X_5 vara ett stickprov på X .

Med observerade värden på variablerna $x_1 = 45, x_2 = 50, x_3 = 62, x_4 = 57$ och $x_5 = 70$, kan vi räkna ut observerade värden på statistikorna $\sum_{i=1}^5 X_i, \bar{X}, \sum_{i=1}^5 X_i^2, \max(X_i)$ och $\min(X_i)$, till

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 284 \quad \bar{x} = 56.8 \quad \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 16518 \quad \max(x_i) = 70 \quad \min(x_i) = 45.$$

Vi skattar μ med \bar{X} med observerat värde $\bar{x} = 56.8$, samt σ^2 med S^2 , där det observerade värdet blev

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) = 96.7.$$

6.10 Låt X vara den i gallon utvunnen mängd bränsle som fås för ett ton kol i en bränsleutvinningsprocess. Ett stam/blad-diagram för de 48 observationerna på X återgivna på sidan 212 ges nedan:

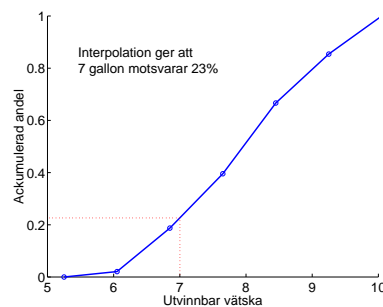
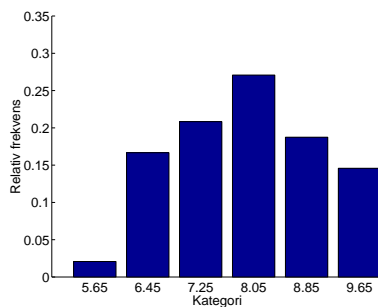
| | |
|----|------------------|
| 5 | 3 |
| 6 | 12728257 |
| 7 | 6467816399117494 |
| 8 | 8728710275241 |
| 9 | 056127563 |
| 10 | 0 |

Lägger man huvudet på sned och kisar lite grand så kan man om man ana en klockform i fördelningen av de observerade värdena. Låt oss kategorisera data i 6 kategorier.

Spannet av observationerna är $10 - 5.3 = 4.7$, det vill säga en kategori bör innehålla observationer inom ett intervall av längd $4.7/6 = 0.8$ avrundat uppåt. Vi bildar alltså kategorierna

| Kategori | [5.25, 6.05) | [6.05, 6.85) | [6.85, 7.65) | [7.65, 8.45) | [8.45, 9.25) | [9.25, 10.05) |
|------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|
| # obs. | 1 | 8 | 10 | 13 | 9 | 7 |
| rel. frkv. | 2% | 17% | 21% | 27% | 18% | 14% |
| ack. frkv. | 2% | 19% | 40% | 67% | 85% | 100% |

Nedan visas de relativa frekvenserna för de olika kategorierna och motsvarande summapolygon.



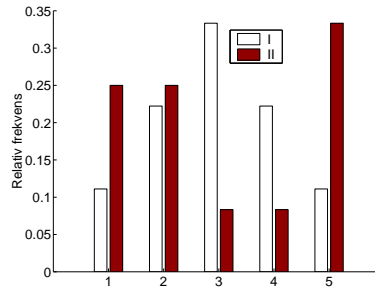
6.17 Vi har två datamängder

| I | II |
|-------|---------|
| 1 3 2 | 1 2 4 1 |
| 2 5 4 | 2 5 2 5 |
| 4 3 3 | 1 5 5 3 |

Vi kommer att se att de vanligaste statistikorna på de båda stickproven blir i stort sett de samma.

| | <i>I</i> | <i>II</i> |
|------------|----------|-----------|
| median | 3 | 2.5 |
| medelvärde | 3 | 3 |
| spann | 4 | 4 |
| min | 1 | 1 |
| max | 5 | 5 |
| s^2 | 1.5 | 2.9 |
| s | 1.2 | 1.7 |

Det enda som skiljer synbart åt är stickprovsvariationen, s^2 , men med så få observationer är det svårt att uttala sig. Betraktar vi istället de relativa frekvenserna för de olika utfallen så får vi nedanstående graf:



Skall man försöka säga någonting så verkar stickprov *I* komma från en unimodal fördelning (en topp) medan stickprov *II* verkar ha åtminstone två toppar.

6.18 Låt X vara livslängden för ett batteri och X_1, \dots, X_n vara ett stickprov på X . Låt $\mu = E[X]$ och $\text{Var}(X) = \sigma^2$. För $n = 50$ har vi de observerade värdena på statistikorna $\sum X_i$ och $\sum X_i^2$ som

$$\sum_{i=1}^n x_i = 63\,707 \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = 154\,924\,261.$$

Vi skattar μ med \bar{X} och σ^2 med S^2 . Observerade värden blir

$$\bar{x} = 1274 \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) = 1.505 \cdot 10^6 \quad s = 1227.$$

Eftersom standardavvikelse och väntevärde är ungefär lika så kanske man kan modellera livslängden med exponentialfördelningen.

Är det rimligt att μ egentligen är 1277? Spridningen för vår skattning \bar{X} av μ är

$$\text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \{\text{ober.}\} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{\sigma^2}{n},$$

och en skattning av denna blir S^2/n med observerat värde $s^2/n = 173.5$. Eftersom 1277 ligger mycket nära vår observerade skattning \bar{x} , och gott och väl inom en observerad standardavvikelse från denna, är det inte otroligt att $\mu = 1277$.