

Lösningar till uppgifter från Milton-Arnold, kap 9–10

Matematisk statistik

9.2 Låt $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Vi skattar p med $\hat{p} = X/n$ som uppfyller $E[\hat{p}] = p$ och $\text{Var}(\hat{p}) = p(1-p)/n$. Centrala gränsvärdesatsen (och Slutsky) ger att

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \stackrel{\text{approx}}{\sim} N(0, 1)$$

så om vi bestämmer $z_{\alpha/2}$ så att $P(|Z| \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$, gäller med sannolikhet $1 - \alpha$ att

$$\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}.$$

Observationer $n = 193$ och $x = 75$ ger punktskattningen $\hat{p} = x/n = 0.3886$ av p . Med $1 - \alpha = 0.95$ får vi $z_{\alpha/2} = 1.96$ så ett observerat konfidensintervall för p blir

$$0.3198 \leq p \leq 0.4574 \quad (95\%).$$

Om $|\hat{p} - p| \leq 0.03$ med sannolikhet 95%, så skall vi välja n så att

$$z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq 0.03 \Rightarrow n \geq \frac{z_{\alpha/2}^2}{(0.03)^2} \hat{p}(1-\hat{p}) = 1014.$$

En konservativ gräns som inte beror av \hat{p} fås om man väljer $\hat{p} = 1/2$ i uttrycket ovan:

$$n \geq \frac{z_{\alpha/2}^2}{(0.03)^2} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1067.$$

9.16 Låt $X \sim \text{Bin}(n, p)$ och testa

$$H_0 : p = p_0 = 0.80 \quad \text{mot} \quad H_1 : p > p_0.$$

Vi förkastar H_0 för stora värden på \hat{p} , och med normalapproximation av \hat{p} att

$$P\left(\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} > z_{\alpha} \mid H_0\right) = 0.01$$

för $z_{\alpha} = 2.3263$. Vi förkastar H_0 om $Z = (\hat{p} - p_0)/\sqrt{p_0(1-p_0)/n} > z_{\alpha}$, eller analogt, om $\hat{p} \geq p_0 + z_{\alpha} \sqrt{p_0(1-p_0)/n}$. Med observationer $n = 150$, $x = 133$ får vi att $\hat{p} = 0.8867$ och $z = 2.6536$. Eftersom

$$0.8867\hat{p} \geq 0.8 + z_{\alpha} \sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{150}} = 0.8760$$

förkastar vi H_0 på 1%.

9.19 Låt $X \sim \text{Bin}(n, p_1)$ och $Y \sim \text{Bin}(m, p_2)$. Vi skattar p_1 med $\hat{p}_1 = X/n$, p_2 med $\hat{p}_2 = Y/m$ och $p_1 - p_2$ med $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$. Den sista skattningen har

$$E[\hat{p}_1 - \hat{p}_2] = p_1 - p_2 \quad \text{och} \quad \text{Var}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \frac{p_1(1-p_1)}{n} + \frac{p_2(1-p_2)}{m}.$$

Enligt CGS och Slutsky är alltså

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}}} \stackrel{\text{approx}}{\sim} N(0, 1).$$

Om vi bestämmer $z_{\alpha/2}$ så att $P(|Z| \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$, gäller med sannolikhet $1 - \alpha$ att

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}} \leq p_1 - p_2 \leq \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}}.$$

Observationer $n = 200$, $x = 62$, $m = 190$ och $y = 76$ ger punktskattningarna $\hat{p}_1 = x/n = 0.31$ och $\hat{p}_2 = 0.40$. Med $1 - \alpha = 0.90$ får vi $z_{\alpha/2} = 1.6449$ så ett observerat konfidensintervall för $p_1 - p_2$ blir

$$-0.1694 \leq p_1 - p_2 \leq -0.0106 \quad (90\%).$$

9.26 Låt p_1 vara andelen defekta enheter vid uppvärmning i kolugn och p_2 motsvarande med laser. Vill testa

$$H_0 : p_1 = p_2 + 0.02 \quad \text{mot} \quad H_1 : p_1 \geq 0.02 + p_2.$$

Låt X vara antalet defekta bland n stycken uppvärmda med kol och Y motsvarande för laseruppvärmda. Modell: $X \sim \text{Bin}(n, p_1)$ och $Y \sim \text{Bin}(m, p_2)$. Bilda skattningarna $\hat{p}_1 = X/n$, $\hat{p}_2 = Y/m$ och teststatistikan

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}}} \stackrel{\text{approx}}{\sim} N(0, 1)$$

enligt CGS och Slutsky. Vi förkastar H_0 för stora värden på Z och ur tabell har vi att $P(Z > z_\alpha) = 0.05$ för $z_\alpha = 1.6449$. Vi får utfallen $x = 5$, $n = 100$, $y = 1$, $m = 100$ vilket ger de observerade skattningarna $\hat{p}_1 = 5/100 = 0.05$, $\hat{p}_2 = 0.01$ och

$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - 0.02}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m}}} = 0.833.$$

Eftersom $z < z_\alpha$ så kan vi inte förkasta H_0 . P-värdet blir $1 - \Phi(z) = \Phi(-0.833) = 0.203$.

10.4 Låt $X \sim N(\mu_X, \sigma_X)$ och $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y)$, med $\mu_X = 8$, $\sigma_X^2 = 16$, $\mu_Y = 5$, $\sigma_Y^2 = 9$, $n = 25$ och $m = 36$. Då är

$$\bar{X} \sim N(\mu_X, \sigma_X/\sqrt{n}) \quad \text{och} \quad \bar{Y} \sim N(\mu_Y, \sigma_Y/\sqrt{m}).$$

Vidare så är

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}\right) \Rightarrow \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - 3}{\sqrt{801/30}} \sim N(0, 1).$$

10.8 Låt X_1, \dots, X_n vara ett stickprov på X med $\mu_X = E[X]$ och $\sigma_X^2 = \text{Var}(X)$, och Y_1, \dots, Y_m vara ett stickprov på Y med $\mu_Y = E[Y]$ och $\sigma_Y^2 = \text{Var}(Y)$. Testa

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \quad \text{mot} \quad \sigma_X^2 < \sigma_Y^2$$

på nivå $\alpha = 0.10$, med hjälp av statistikan

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

som under H_0 är approximativt F -fördelad med $(n-1, m-1)$ frihetsgrader. Vi förkastar H_0 för små värden på F och för $n = 21$ och $m = 25$ får vi ur tabell att $P(F < f_\alpha) = 0.10$ för $f_\alpha = 0.5660$. Vi observerar utfallen $s_X^2 = 25$ och $s_Y^2 = 100$ vilket ger ett observerat värde på F till $f = 0.25 < f_\alpha$. Vi förkastar H_0 på nivå 10%.

10.14 Låt X_1, \dots, X_n vara ett stickprov på X med $\mu_X = E[X]$ och $\sigma_X^2 = \text{Var}(X)$, och Y_1, \dots, Y_m vara ett stickprov på Y med $\mu_Y = E[Y]$ och $\sigma_Y^2 = \text{Var}(Y)$. Testa först

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \quad \text{mot} \quad \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

på nivå $\alpha = 0.20$, med hjälp av statistikan

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

som under H_0 är approximativt F -fördelad med $(n-1, m-1)$ frihetsgrader. Vi förkastar H_0 för små och stora värden på F och för $n = 10$ och $m = 10$ får vi ur tabell att

$$P(f_1 \leq F \leq f_2) = 0.80 \quad \text{för} \quad f_1 = 0.7167, \quad f_2 = 1.3952.$$

Vi förkastar H_0 om vi observerar $F < f_1$ eller $F > f_2$. Vi observerar utfallet F till $f = s_x^2/s_y^2 = 1.0967$. Vi förkastar inte H_0 på nivå 20%.

Antag sålunda att $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ i fortsättningen. Bilda den bästa skattningen av σ^2 genom

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}$$

med observerat värde $s_p^2 = 23.8$. Testa

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \quad \text{mot} \quad H_1 : \mu_X > \mu_Y$$

på nivå α med hjälp av teststatistikan

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \stackrel{\text{approx}}{\sim} t_{n+m-2}\text{-fördelad under } H_0$$

enligt CGS. Vi förkastar H_0 för stora värden T och ur tabell har vi att $\mathbf{P}(T > t_\alpha) = 0.01$ för $t_\alpha = 2.5524$. Vi observerar utfallet på T till $t = 12.4524$ och förkastar H_0 på nivå 1%.

10.21 Låt X_1, \dots, X_n vara ett stickprov på X med $\mu_X = \mathbf{E}[X]$ och $\sigma_X^2 = \text{Var}(X)$, och Y_1, \dots, Y_m vara ett stickprov på Y med $\mu_Y = \mathbf{E}[Y]$ och $\sigma_Y^2 = \text{Var}(Y)$. Testa först

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \quad \text{mot} \quad \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

på nivå $\alpha = 0.20$, med hjälp av statistikan

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

som under H_0 är approximativt F -fördelad med $(n-1, m-1)$ frihetsgrader. Vi förkastar H_0 för små och stora värden på F och för $n = 121$ och $m = 61$ får vi ur tabell att

$$\mathbf{P}(f_1 \leq F \leq f_2) = 0.80 \quad \text{för} \quad f_1 = 0.7574, \quad f_2 = 1.3476.$$

Vi förkastar H_0 om vi observerar $F < f_1$ eller $F > f_2$. Vi observerar utfallet F till $f = s_x^2/s_y^2 = 119$ (!). Vi förkastar H_0 på nivå 20%.

Vi kan således inte anta att $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$. Testa

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \quad \text{mot} \quad H_1 : \mu_X > \mu_Y$$

på nivå α med hjälp av teststatistikan

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}}} \stackrel{\text{approx}}{\sim} t_\gamma\text{-fördelad under } H_0$$

enligt CGS. Vi skattar antalet frihetsgrader γ med

$$\gamma = \left\lfloor \frac{\left(\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}\right)^2}{\frac{(S_X^2/n)^2}{n-1} + \frac{(S_Y^2/m)^2}{m-1}} \right\rfloor.$$

Med data får vi att $\gamma = 123$ och $\mathbf{P}(T > t_\alpha) = 0.001$ för $t_\alpha = 3.1578$ ur t_{123} -fördelningen. Vi förkastar H_0 på nivå 0.1% om $T > t_\alpha$ och vi observerar utfallet $t = 20$ så vi förkastar H_0 .

10.31 Låt X_1, \dots, X_n vara oberoende observationer på n enheter, och Y_1, \dots, Y_n observationer på samma individer efter en behandling. Här är X_i resultatet av mätning av vindhastighet med hjälp av radarutrustning och Y_i mätning vid samma tidpunkt av vindhastigheten, men med hjälp av ett satellitsystem.

Modellen vi arbetar i är att $\mathbf{E}[X_i - Y_i] = \mu$ och $\text{Var}(X_i - Y_i) = \sigma^2$. Vi skattar den systematiska skillnaden mellan metoderna μ med \bar{V} och σ^2 med $S_V^2 = \frac{1}{n-1} \sum (V_i - \bar{V})^2$. Ett $1 - \alpha$ konfidensintervall fås ur att vi bestämmer $t_{\alpha/2}$ så att

$$T = \frac{\bar{V} - \mu}{S_V/\sqrt{n}} \quad \mathbf{P}(|T| \leq t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

Enligt CGS är T approximativt t_{n-1} -fördelad och ur tabeller får vi att för $n = 12$ är $t_{\alpha/2} = 2.2010$ för $\alpha = 0.05$. Ett $1 - \alpha = 95\%$ konfidensintervall ges således av

$$\bar{V} - t_{\alpha/2} \frac{S_V}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{V} + t_{\alpha/2} \frac{S_V}{\sqrt{n}} \quad (95\%).$$

Med observationer får vi att

x_i	y_i	$v_i = x_i - y_i$
4.46	4.08	0.38
3.99	3.94	0.05
\vdots	\vdots	\vdots
3.30	4.80	-1.50

$\Rightarrow \bar{v} = -0.4117 \quad s_V = 1.1399$

och det observerade intervallet blir

$$-1.1359 = \bar{v} - t_{\alpha/2} \frac{s_V}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{v} + t_{\alpha/2} \frac{s_V}{\sqrt{n}} = 0.3126 \quad (95\%).$$