# Inledning till algebraisk geometri

## Hilberts Nollställensats

**Hilberts Nollställensats i svag form.**
*Låt $f_1, \ldots, f_l \in k[x_x, \ldots, x_n]$, där $k$ är en algebraiskt sluten kropp, vara polynom utan gemensamma nollställen. Då finns det polynom $g_1, \ldots, g_l$ sådana att*

$$1 = f_1 g_1 + \cdots + f_l g_l \ .$$

**Hilberts Nollställensats.**
*För varje ideal $J \subset k[x_x, \ldots, x_n]$, $k$ algebraiskt sluten, gäller $I(V(J)) = \sqrt{J}$.*

I den äldre litteraturen visas den svaga formen med eliminationsteori. Hilberts namn är där bara förknippat med själva satsen. Med Rabinowitsch trick är beviset kort. Enligt André Weils slagord 'eliminera eliminationsteorin' visas den svaga formen nuförtiden som i boken, efter Artin–Tate och Zariski. Datoralgebran gör det möjligt att verkligen beräkna lösningsmängder och de gamla metoderna blir intressanta igen. Jag följer [Laureano Gonzalez-Vega, Fabrice Rouillier and Marie-Francoise Roy, Symbolic recipes for polynomial system solving. In: Some tapas of computer algebra. Springer-Verlag, Berlin, 1999].

**Bevisidé**. Vi använder induktion. Vi vill hitta polynom $\varphi_i \in k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ som har gemensamma nollställen om och endast om de $f_i$ har gemensamma nollställen. Detta gör vi med resultanten. Minst ett polynom skall därför ha ledande koefficient (som polynom i $x_n$) utan nollställen, d v s den ledande koefficienten är 1.

**Lemma.** *Låt $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$, där $k$ är en oändlig kropp (t ex $k$ algebraiskt sluten), vara ett polynom av grad $d$. Det finns ett linjärt koordinatbyte $x_1 = y_1 + \lambda_1 y_n$, ..., $x_{n-1} = y_{n-1} + \lambda_{n-1} y_n$, $x_n = y_n$, där $\lambda_i \in k$, sådant att $f(y_1 + \lambda_1 y_n, \ldots, y_n)$ har ledande koefficient 1 som polynom i $y_n$.*

**Bevis**. Se Reid, 3.13. □

**Bevis av Hilberts Nollställensats i svag form**.
Induktion m a p $n$. För $n = 1$ ger villkoret att $\mathrm{SGD}(f_1, \ldots, f_l) = 1$ och polynomen $g_1, \ldots, g_l$ hittas med Euklides algoritm.

Låt nu $n > 1$. Vi får anta att $f_1$ har ledande koefficient i $x_n$. Låt $u$ vara en ny variabel och definiera

$$q(u, x_1, \ldots, x_n) = f_2 + u f_3 + \cdots u^{l-2} f_l \ .$$

Beräkna nu resultanten $R_{f_1,q} \in k[u, x_1, \ldots, x_{n-1}]$. Vi kan skriva $R_{f_1,q}$ som polynom i $u$:

$$R_{f_1,q} = \varphi_0(x_1, \ldots, x_{n-1}) + \cdots + u^s \varphi_s(x_1, \ldots, x_{n-1}) \ .$$

Vi vet att $R_{f_1,q} = v f_1 + w q$. Jämförelse av koefficienterna till de olika $u$ potenser ger att alla $\varphi_i \in (f_1, \ldots, f_k)$.

**Påstående.** *De* $\varphi_i$ *saknar gemensamma nollställen i* $\mathbb{A}_k^{n-1}$.

**Bevis**. Antag att $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ är ett nollställe. Då är $R_{f_1,q} = 0$ för alla $(u, a_1, \ldots, a_{n-1})$, så $f_1(a_1, \ldots, a_{n-1}, x_n)$ och $q(u, a_1, \ldots, a_{n-1}, x_k)$ har en gemensam rot i $k$ för alla $u \in k$. Eftersom $f_1(a_1, \ldots, a_{n-1}, x_n)$ har ledande koefficient 1 har $f_1(a_1, \ldots, a_{n-1}, x_n)$ bara ändlig många rötter, så det finns en rot $\xi$ så att $q(u, a_1, \ldots, a_{n-1}, \xi) = 0$ för oändligt många $u \in k$. Men $q(u, a_1, \ldots, a_{n-1}, \xi)$ är ett polynom i den ena variablen $u$ med konstanta koefficienter av grad $\leq l-2$. Så detta är nollpolynomet och $f_i(a_1, \ldots, a_{n-1}, \xi) = 0$, som motsäger att $(f_1, \ldots, f_l)$ saknar nollställen. □

Enligt induktionshypotesen är $1 \in (\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$. Eftersom $(\varphi_1, \ldots, \varphi_s) \subset (f_1, \ldots, f_l)$ existerar alltså $g_i$ med $1 = \sum f_i g_i$. □