En reformerad matematikutbildning vid Chalmers

Stig Larsson

Chalmers tekniska högskola

Göteborg

`http://www.math.chalmers.se/~stig`

Kvalitetskonferensen, Norrköping, 25–27 september 2001

Översikt

- reformprogrammet
- kurserna

En reformerad matematikutbildning vid Chalmers

- pedagogiskt utvecklingsprojekt
- matematiken i civilingenjörsutbildningen
- försök i liten skala: 1996–98
- full skala:
  - 1999–00 årskurs 1 Kf+Kb
  - 2000–01 årskurs 1,2 Kf+Kb
  - 2001–02 årskurs 1 K+Kf+Kb, årskurs 2 Kf+Kb

Kf = kemiteknik med fysik   30 studenter
Kb = bioteknik   30 studenter 1999, 60 studenter 2000
K = kemiteknik   70 studenter
civilingenjörsutbildningar vid Sektionen för Kemi

Arbetsgrupp

matematiklärare:
Kenneth Eriksson
Claes Johnson
Don Estep, Colorado State University
Mohammad Asadzadeh
Mats Larson
Stig Larsson projektledare
Klas Samuelsson
Nils Svanstedt
8 doktorander

matematiker: tillämpad matematik, tekniska beräkningar
Chalmers Finite Element Center Φ

Arbetsgrupp, forts

kemister:

Bo Albinsson linjeledare Kf

Carl Johan Franzén linjeledare Kb

Jerker Mårtensson linjeledare K

Datorn

datorn — ett beräkningshjälpmedel

- nya förutsättningar
- nya möjligheter
- reflekteras inte fullt ut i undervisningen eller läroböckerna varken i matematik eller teknikämnen
- behov av att reformera utbildningen i matematik och teknikämnen

Konstruktiv matematik

tillämpning — numerisk beräkning — matematik

konstruktiv matematik baserad på numerisk beräkning

- mer begriplig matematik
- generella ekvationer, inte enbart förenklade specialfall
- tillämpningar tidigt i utbildningen
- nå mer avancerade tillämpningar i slutet av utbildningen
- öppna problem

Undervisning

innehåll:

- matematisk teori
- numerisk beräkning
- modellering — tillämpning
- programmering
- skriftlig och muntlig presentation

undervisningsform:

- föreläsning, 4 tim/vecka, en grupp à 160 studenter
- datorstudio, 4 tim/vecka, fyra grupper à 40 studenter
- handledning, 4 tim/vecka, grupper à 8–10 studenter

äldre teknologer deltar som handledare och assistenter i datorstudio

Undervisning, forts

examination:

- skriftlig tentamen
- skriftlig/muntlig projektredovisning
- muntlig tentamen

Matlab

- Matlab = “matrix laboratory”
- numeriska matrisberäkningar
- kalkylator $\rightarrow$ programmeringsmiljö
- illustration av matematiska begrepp med färdig interaktiv programvara
- studenterna skriver egna program som implementerar numeriska algoritmer
- skicklighet i programmering och implementering
- tvingar till förståelse av algoritmerna och matematiken
- stark koppling till den konstruktiva matematiska teorin
- självförtroende genom att använda egen programvara, baserad på matematik som man behärskar
- fullt integrerad i kurserna: 4 tim/vecka i datorstudio!

Beräkning

symbolisk beräkning:

$$\int_0^y \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\arctan x\Big]_0^y = \arctan(y)$$

för hand, Mathematica, Maple, Derive, ...

- teori
- modellering: ställa upp och skriva om ekvationer
- exakt lösning i enkla specialfall

Beräkning

symbolisk beräkning: $$\int_0^y \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\arctan x\Big]_0^y = \arctan(y)$$

för hand, Mathematica, Maple, Derive, ...

- teori
- modellering: ställa upp och skriva om ekvationer
- exakt lösning i enkla specialfall

numerisk beräkning: $$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \sum_n \frac{h_n}{1+x_n^2} = 0.78$$

(för hand), Matlab, Mathematica, Maple, Derive, ...

- approximativ lösning i allmänt fall

Beräkning

symbolisk beräkning:
$$\int_0^y \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\arctan x\Big]_0^y = \arctan(y)$$

för hand, Mathematica, Maple, Derive, ...

- teori
- modellering: ställa upp och skriva om ekvationer
- exakt lösning i enkla specialfall

numerisk beräkning:
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \sum_n \frac{h_n}{1+x_n^2} = 0.78$$

(för hand), Matlab, Mathematica, Maple, Derive, ...

- approximativ lösning i allmänt fall

Vi använder inte symbolisk programvara.
Vi använder numerisk beräkning i Matlab-miljö.

Generell och speciell ekvation

- generella ekvationer
  - algebraisk ekvation $f(x) = 0$
  - ordinär diff ekv $u'(t) = f(t, u(t))$
  - partiell diff ekv $-\nabla \cdot (a(x)\nabla u(x)) = f(x)$
- speciella ekvationer
  - algebraisk ekvation $x^2 + ax + b = 0, \quad x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a}{2})^2 - b}$
  - ordinär diff ekv $u'' + \omega^2 u = 0, \quad u(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$
  - partiell diff ekv $-\Delta u = 0, \quad u(x) = -1/(4\pi|x|)$

Litteratur

- "Applied Mathematics — Body and Soul,
  K. Eriksson, D. Estep, C. Johnson (kommer på Springer-Verlag)
- "Computational Differantial Equations",
  K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo, C. Johnson, Studentlitteratur 1996
- programvara

Utvärdering

- observatörer: matematiker från Växjö, Helsinki, Oslo, Trondheim, kemist från Chalmers
- pedagoger: Ulla Runesson, Berner Lindström, Göteborgs Universitet
- internet: `http://www.phi.chalmers.se`

Försök i full skala

samtliga matematikkurser i årskurs 1–2:
analys i en och flera variabler
linjär algebra
numerisk analys
fourieranalys
komplex analys
programmering
(matematisk statistik ingår ej i reformprojektet)
Kf: 33 poäng
Kb: 27 poäng
K: 25 poäng

Kurser

årskurs 1
Analys och linjär algebra A 4 poäng
Analys och linjär algebra B 7 poäng
Analys och linjär algebra C 4 poäng

årskurs 2
Differentialekvationer och tekniska beräkningar A 4 poäng
Differentialekvationer och tekniska beräkningar B 4 poäng

Fourianalys och komplex analys 4 poäng

summa 27 poäng
(lite förenklat)

tagit över samtliga matematikkurser utom matematisk statistik

Kemiteknik

nästa steg: modernisera matematikanvändningen i kemiteknikkurserna

ny matematik $\longrightarrow$ kemiteknik

med början ht 2001:

inledande kemi

transportprocesser

kemisk reaktionsteknik

bioprocessteknik

- Chalmers speciella satsning på pedagogiskt utvecklingsarbete
- ansökan till grundutbildningsrådet

kurs för doktorander och lärare vid sektion K vt 2001

Kemiteknik

nästa steg: modernisera matematikanvändningen i kemiteknikkurserna

ny matematik $\longrightarrow$ kemiteknik

$\longleftarrow$

med början ht 2001:

inledande kemi

transportprocesser

kemisk reaktionsteknik

bioprocessteknik

- Chalmers speciella satsning på pedagogiskt utvecklingsarbete
- ansökan till grundutbildningsrådet

kurs för doktorander och lärare vid sektion K vt 2001

The courses

contents:

- analysis in one and several variables
- linear algebra
- fourier analysis
- programming
- numerical analysis
- ordinary and partial differential equations

numerical computation:

- constructive (more understandable)
- advanced applications
- general equations (not just simplified linear equations)

The courses, cont'd

ALA-A Analysis and Linear Algebra A 4 points

ALA-B Analysis and Linear Algebra B 7 points

ALA-C Analysis and Linear Algebra C 4 points

DETB-A Differential Equations and Scientific Computing A 4 points

DETB-B Differential Equations and Scientific Computing A 4 points

Fourier Analysis and Complex Analysis 4 points

Total 27 points

Analysis and Linear Algebra A

goal: $f(x) = 0$ system of algebraic equations

integers, rational numbers $\mathbf{Q}$

function $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$

Lipschitz condition $|f(x) - f(y)| \le L_f |x - y|$

Cauchy sequence $x_n \in \mathbf{Q}$, $|x_n - x_m| \to 0$ as $n, m \to \infty$

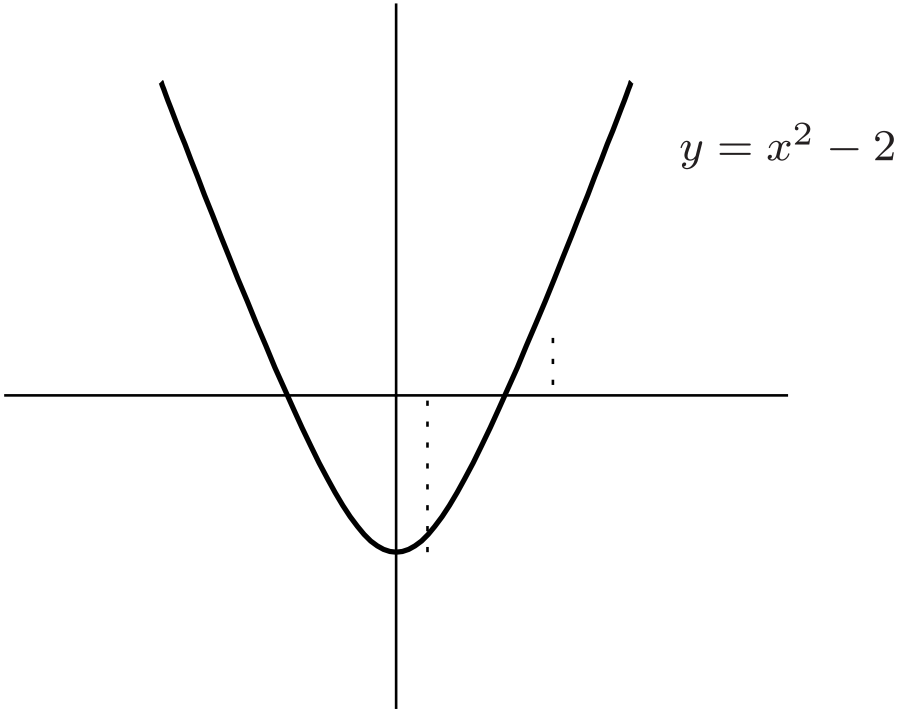
solve $f(x) = 0$, construct the real numbers $\mathbf{R}$

real number = Cauchy sequence of rational numbers = decimal expansion

ALA-A 2

example: $f(x) = x^2 - 2 = 0$

the bisection algorithm



ALA-A bisec.m

```
function x=bisec(f,int,tol)
% bisec - bisection algorithm for the scalar equation f(x)=0
%   Syntax:
%           x = bisec(f,int,tol)
%   Arguments:
%           f - string containing the name of a function file
%           int - 1x2 matrix specifying an interval int=[a,b]
%           tol - a tolerance
%   Returns:
%           x - an approximate solution in the interval int=[a,b]
%   Description:
%           The program bisec uses the bisection algorithm to
%           compute an approximate solution of  ...
%   Examples:
%          x = bisec('sin',[1,4],1e-7)   computes pi to 7 decimals
%   See also:
%          regula_falsi.m, fixpoint.m, newton.m

Write your program here!
```

ALA-A 3

x_n	y_n
1.50000000000000	1.50000000000000
0.75000000000000	1.25000000000000
1.12500000000000	1.37500000000000
1.31250000000000	1.43750000000000
1.40625000000000	1.40625000000000
1.45312500000000	1.42187500000000
1.42968750000000	1.41406250000000
1.41796875000000	1.41796875000000
1.41503906250000	1.41503906250000
1.41357421875000	1.41455078125000
1.41394042968750	1.41418457031250
1.41416931152344	1.41419982910156
1.41419219970703	1.41420745849609
1.41420364379883	1.41421127319336
1.41420936584473	1.41421318054199

two decimal expansions (Cauchy sequences):

$\bar{x} = 1.4142...$

$\bar{y} = 1.41421...$

Lipschitz condition $\Rightarrow$

$f(x_n) \to 0, \quad f(y_n) \to 0$

$f(\bar{x}) = f(\bar{y}) = 0$

f monotone $\Rightarrow$ uniqueness $\Rightarrow$

$\bar{x} = \bar{y} = 1.4142... =: \sqrt{2}$

ALA-A 4

constructive method:

1. an algorithm that generates a Cauchy sequence, $x_n \to \bar{x}$
2. a proof that $\bar{x}$ is a solution of the equation, $f(\bar{x}) = 0$
3. uniqueness $\bar{x} = \bar{y}$

uniqueness implies that all constructions give the same result

ALA-A 5

The intermediate value theorem:

A (Lipschitz) continuous function $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ attains all values between $f(a)$ and $f(b)$.

Proof:

If y is an intermediate value, then solve $f(x) - y = 0$ by means of the bisection algorithm.

ALA-A 6

fixed point iteration for $x = g(x)$:

$x_{n+1} = g(x_n)$

system of equations

The fixed point theorem:

The system of equations $x = g(x)$ has a unique solution if the Lipschitz constant $L_g < 1$.

Proof:

The fixed point iteration generates a Cauchy sequence.

ALA-A 7

Newton's method for $f(x) = 0$:
the derivative (linearization)

$$f(x) = f(\bar{x}) \quad + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) \quad + E_f(x, \bar{x})$$

$$\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} f'(x_n)h_n = -f(x_n) \\ x_{n+1} = x_n + h_n \end{cases}$$

matrix, solve linear system of equations, linear algebra

The inverse function theorem:
Suppose that $f(x_0) = y_0$ and that the matrix $f'(x_0)$ is nonsingular. Then f has an inverse function $x = f^{-1}(y)$ near y_0.

Proof:
Solve the equation $f(x) - y = 0$ by Newton's method.

ALA-A 8

We now have:

- $f(x) = 0$
- polynomials $p(x)$
- rational functions $\dfrac{p(x)}{q(x)}$
- their inverses: $f(x) = y \quad \Rightarrow \quad x = f^{-1}(y)$

What about $\log(x),\ \exp(x),\ \sin(x),\ \cos(x)$?

goal: $u'(x) = f(x, u(x))$ system of ordinary differential equations

$$(*) \quad \begin{cases} u'(x) = f(x), & a < x < b \\ u(a) = u_a \end{cases}$$

constructive method:

1. algorithm $U_n(x_i) = U_n(x_{i-1}) + h_n f(x_{i-1})$
2. Cauchy sequence $U_n(x) \to u(x)$
3. $u(x)$ solves (*)
4. uniqueness

We have constructed the integral: $u(x) = u_a + \int_a^x f(y)\,dy$

ALA-B 2

$$\begin{cases} u'(x) = f(x), \quad a < x < b \\ u(a) = u_a \end{cases}$$

$$u(x) = u_a + \int_a^x f(y)\, dy$$

the logarithm:

$$\begin{cases} u'(x) = 1/x, \quad x > 1 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

$$u(x) = \int_1^x \frac{1}{y}\, dy =: \log(x)$$

symbolic calculations by hand

write matlab programs

ALA-B 3

the exponential function:

$$\begin{cases} u' = u, \quad x > 0 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

the same construction: $U_n(x_i) = U_n(x_{i-1}) + h_n U_n(x_{i-1})$

$u(x) = \exp(x)$

all the well-known properties follow

ALA-B 4

the trigonometric functions:

$$\begin{cases} w'' + w = 0, \quad x > 0 \\ w(0) = 0, \; w'(0) = 1 \end{cases}$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ w' \end{bmatrix}, \qquad u' = \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = Au$$

the same construction: $U_n(x_i) = U_n(x_{i-1}) + h_n A U_n(x_{i-1})$

$$w(x) = u_1(x) = \sin(x) \quad w'(x) = u_2(x) = \cos(x)$$

all the well-known properties follow

$$(w'' + w)w' = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\Big((w')^2 + w^2\Big) = 0 \Rightarrow (w')^2 + w^2 = \text{constant} = 1$$

agrees with the well-known geometric definitions of $\sin$ and $\cos$

ALA-B 5

the general system of ODEs:

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)), \quad x > a \\ u(a) = u_a \end{cases}$$

the same construction: $U_n(x_i) = U_n(x_{i-1}) + h_n f(x_{i-1}, U_n(x_{i-1}))$
$U_n(x) \to u(x)$

hand calculation, analytic solution:
special simple cases
linear ODEs
need: matrix theory, eigenvalues, linear algebra

applications: chemical reaction kinetics, mechanics, population dynamics, ...

Analysis and Linear Algebra C

goal: $-\nabla \cdot (a(x)\nabla u(x)) = f(x)$ partial differential equation

analysis in several variables
partial derivative
multiple integral

applications: heat conduction, diffusion, ...

Diff Eqs and Scientific Computing A, B

goal: $u_t - \nabla \cdot (a(x,u)\nabla u) = f(x,u)$

nonlinear system of partial differential equations

implementation of the finite element method

linear algebra

convection-reaction-diffusion equations

Navier-Stokes equations

advanced applications:

combined fluid flow, heat conduction, diffusion, chemical reaction