TMA640 MATEMATISK ANALYS I EN VARIABEL F, DEL B, 1996

INLÄMNINGSUPPGIFTER

En uppgift från avsnitt A och en från avsnitt B nedan redovisas muntligt och skriftligt i vecka 49. Arbeta ensam eller i grupper om två. Uppgifterna är värda 3 bonuspoäng vardera, max 6 poäng, vid tentamen i december 1996 men inte senare. Uppgifterna löses delvis med handräkning, delvis med datorberäkning med Matlab. Ingen speciell datorhandledning kommer att schemaläggas, du får komma överens med din övningsledare om att eventuellt utnyttja räkneövningar till detta. Du kan lämna in skriftliga redogörelser (och få dem rättade) så snart de är färdiga. Vänta inte till senaste inlämningsdag: tentamensdagen.

Rapportskrivande och muntlig presentation är ett viktigt inslag i ingenjörens arbete och detta måste tränas likaväl som själva problemlösandet. Att formulera en kortfattad, korrekt och begriplig lösning är alltså en viktig del av uppgiften. Detta kommer att beaktas vid rättning av inlämningsuppgifter och tentamen. Den skriftliga redogörelsen ska vara *genomtänkt* och *kortfattad*. Jag vill t ex inte se tjocka buntar av datorutskrifter och plottar; välj ut några som är intressanta och illustrativa. Redogörelsen ska vara häftad så att man lätt kan bläddra. Inga lösblad!

Ha en öppen attityd till uppgifterna. Du måste inte göra exakt vad jag föreslår. Kanske kan du hitta på intressantare frågor själv.

Matlab tips: Kommandot `plot(t,u)` plottar kolonnerna i matrisen `u` mot vektorn `t`, medan `plot(u(:,1),u(:,2))` plottar första kolonnen mot andra kolonnen, `axis([0 10 0 10])` beskär bilden samt skalar axlarna lika, `hold` håller kvar bilden så att man kan rita flera kurvor i samma figur. Använd on-line dokumentationen t ex `>> help`, `>> help colon`, `>> help plot`.

A. BEGYNNELSEVÄRDESPROBLEM

A1. Linjärt svängningsproblem. Läs exempel 17 och 25 i PB kap 8.

(a) Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$u''(t) + 4u(t) = 0,\ t > 0; \quad u(0) = 1,\ u'(0) = 1.$$

Vad blir amplituden A, vinkelfrekvensen μ, fasvinkeln δ, perioden T och frekvensen f?

(b) Bestäm alla lösningar till ekvationen

$$u''(t) + au'(t) + 4u(t) = 0 \quad (a > 0).$$

För vilka värden på a får man stark, kritisk respektive svag dämpning?

(c) Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$u''(t) + 4u(t) = \sin(\omega t),\ t > 0; \quad u(0) = 0,\ u'(0) = 0, \tag{1}$$

för olika värden på ω. Varför är fallet $\omega = 2$ speciellt?

(d) Skriv ovanstående ekvation som ett system av ODE $x'(t) = Ax(t) + g(t)$, $x(0) = x_0$, där A är en 2×2-matris, genom att sätta $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ med $x_1 = u$, $x_2 = u'$, och lös med hjälp av programmet `ode23`. Plotta lösningar både som funktion av t och som kurvor i fasplanet, dvs som kurvor i x_1, x_2-planet (fasporträtt). Lägg till en dämpningsterm i (1). Experimentera!

(e) Hitta på numeriska experiment som illustrerar begreppen *svävningar, resonans, insvängningsförlopp (transient).*

A2. Ickelinjärt svängningsproblem. Rörelseekvationen för en (matematisk) pendel med längden l ges av

$$ml\theta'' = -mg\sin\theta,$$

det vill säga

$$\theta'' + \frac{g}{l}\sin\theta = 0. \tag{2}$$

Observera att (2) är en ickelinjär ekvation. För små svängningar kan vi använda approximationen $\sin\theta \approx \theta$ och får den linjära ekvationen

$$\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0, \tag{3}$$

som vi har studerat ovan. Uppgiften är nu att studera den ickelinjära ekvationen (2).

(a) Skriv (2) med $g/l = 4$ som ett system $x' = f(x)$ genom att sätta $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ med $x_1 = \theta$, $x_2 = \theta'$, och lös numeriskt med hjälp av programmet `ode23`. Plotta fasporträttet i första kvadranten, dvs plotta flera lösningskurvor

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad t \geq 0,$$

i x_1, x_2-planet (fasplanet) med

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad x(0) = \begin{bmatrix} k \\ 0 \end{bmatrix}$$

för flera värden på $k > 0$, så länge de stannar kvar i första kvadranten. Jämför med lösningar till (3).

(b) Vilken begynnelsehastighet $\theta'(0)$ ska man ge pendeln i vertikalläget för att den ska vända i horisontalläget? Denna uppgift kan lösas både symboliskt och med numeriska experiment.

Tips: Sätt

$$v = \frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = v\frac{dv}{d\theta}$$

och observera att den resulterande ekvationen är separabel. Alternativ: multiplicera ekvationen med θ' och integrera.

(c) Pendelns period T beror på utslagsvinkeln θ_0. Bestäm T numeriskt för några olika värden på θ_0. Man kan också bestämma T symboliskt i termer av en integral.

(d) Den dämpade pendeln har rörelseekvationen

$$\theta'' + a\theta' + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \quad (a > 0). \tag{4}$$

Tag $a = 0.1$ och $g/l = 4$ och upprepa uppgifterna (a–b) för denna ekvation. (Nu fungerar inte den symboliska metoden.)

(e) Hitta på ett numeriskt experiment som illustrerar begreppet *resonans* för pendeln.

A3. (Svårare.) En roddare ror från en punkt A på stranden av en flod mot den rakt motsatta punkten B på andra stranden så att båtens för ständigt pekar rakt mot B. Strömmens hastighet och båtens hastighet i förhållande till vattnet antages vara konstanta. Ange den väg som båten beskriver. Lös först symboliskt (för hand), sedan numeriskt med Matlab-programmet `ode23`. Experimentera. Man kan t ex låta strömmens hastighet variera.

B. Randvärdesproblem

Värmeledning. Om vi betraktar värmeledning i en lång cylinder orienterad parallellt med x-axeln, kan det ibland vara rimligt att anta att temperaturen endast beror på x.

Vi inför följande beteckningar:

$$\begin{aligned}
&u = u(x) \quad \text{temperaturen i punkten } x \quad [\mathrm{K}],\\
&j = j(x) \quad \text{värmeflödet} \quad [\mathrm{J}/(\mathrm{m}^2\mathrm{s})],\\
&\lambda = \lambda(x) \quad \text{värmeledningsförmågan} \quad [\mathrm{J}/(\mathrm{m\,K\,s})],\\
&q = q(x) \quad \text{värmekällor/sänkor} \quad [\mathrm{J}/(\mathrm{m}^3\mathrm{s})],\\
&A \quad \text{tvärsnittsarean} \quad [\mathrm{m}^2].
\end{aligned}$$

Vi betraktar värmebalansen i ett godtyckligt avsnitt $a < x < b$. Energiprincipen säger att värmeflödet ut genom ändytorna är lika med värmeproduktionen per tidsenhet mellan a och b. Det vill säga

$$j(b)A - j(a)A = \int_a^b qA\,dx. \quad [\mathrm{J}/\mathrm{s}]$$

Vi samlar alla termer under integralen och utnyttjar att A är konstant:

$$\int_a^b (j' - q)\,dx = 0.$$

Eftersom a, b är godtyckliga, måste integranden vara identiskt lika med 0 (varför?), dvs

$$j' = q. \tag{5}$$

Fouriers lag säger att värmeflödet är proportionellt mot temperaturgradienten och att värme strömmar från varmt till kallt. Därför blir flödet

$$j = -\lambda u', \quad [\mathrm{J}/(\mathrm{m}^2\mathrm{s})] \tag{6}$$

vilket insatt i (5) ger

$$-(\lambda(x)u'(x))' = q(x). \tag{7}$$

Detta är värmeledningsekvationen med variabla koefficienter. Om vi antar att koefficienten λ är konstant får vi istället

$$-\lambda u''(x) = q(x). \tag{8}$$

Eftersom $\lambda(x) > 0$ kan ekvationerna (7) och (8) i princip (men sällan i praktiken) lösas genom två integrationer.

Ekvation (7) kombineras med randvillkor, som uttrycker att värmeflödet ut genom randen är proportionellt mot temperaturdifferensen,

$$\begin{aligned} j(x_1) &= k_1(u(x_1) - g_1), \\ -j(x_0) &= k_0(u(x_0) - g_0), \end{aligned} \tag{9}$$

där g_0, g_1 [K] är omgivningens temperatur och k_0, k_1 $[\mathrm{J}/(\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}\,\mathrm{K})]$ värmeöverförings-koefficienter. Med (6) får vi

$$\begin{aligned} \lambda(x_1)u'(x_1) + k_1(u(x_1) - g_1) &= 0, \\ -\lambda(x_0)u'(x_0) + k_0(u(x_0) - g_0) &= 0, \end{aligned} \tag{10}$$

vilket brukas kallas Robins randvillkor (Robin's boundary condition).

Gränsfallet $k_i = 0$, $i = 0, 1$, motsvarar att begränsningsytan är isolerad, dvs $j = 0$, eller

$$u'(x_0) = 0, \quad u'(x_1) = 0,$$

vilket kallas Neumanns randvillkor. Om vi å andra sidan dividerar med k_i i (10) och sedan låter $k_i \to \infty$, får vi att temperaturen är föreskriven:

$$u(x_0) = g_0, \quad u(x_1) = g_1,$$

vilket kallas Dirichlets randvillkor. Gränsfallet $k_i = \infty$ betyder alltså att begränsningsytan är oisolerad, dvs värme kan obehindrat strömma genom ytan och kroppens yttemperatur blir då lika med omgivningens temperatur.

Differentialekvationen (7) tillsammans med randvillkoren (10) säges utgöra ett (tvåpunkts-) randvärdesproblem (two-point boundary value problem). Man behöver inte ha samma typ av randvillkor i båda ändpunkterna; man skulle t ex kunna ha Robins randvillkor till vänster och Dirichlets randvillkor till höger:

$$-\lambda(x_0)u'(x_0) + k_0(u(x_0) - g_0) = 0, \quad u(x_1) = g_1.$$

Diffusion. Vid diffusion är massflödet proportionellt mot gradienten av koncentrationen $c = c(x)$ $[\mathrm{mol}/\mathrm{m}^3]$ av det diffunderande ämnet (jämför (6)):

$$j = -Dc'. \quad [\mathrm{mol}/(\mathrm{m}^2\mathrm{s})]$$

Här är $D = D(x)$ $[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}]$ diffusionskoefficienten. Samma härledning som ovan leder till diffusionsekvationen:

$$-(D(x)c'(x))' = f(x), \quad [\mathrm{mol}/(\mathrm{m}^3\mathrm{s})] \tag{11}$$

med källtermen $f = f(x)$, eller, om D är konstant,

$$-Dc''(x) = f(x). \tag{12}$$

Matematiskt sett är detta samma ekvation som värmeledningsekvationen (7), (8). Randvillkoret (10) blir

$$D(x_1)c'(x_1) + k_1(c(x_1) - c_1) = 0,$$
$$-D(x_0)c'(x_0) + k_0(c(x_0) - c_0) = 0,$$

där koefficienterna k_0, k_1 beror på ytans permeabilitet och c_0, c_1 är koncentrationen i omgivningen.

B1. Värmeledning. Betrakta stationär värmeledning genom en vägg:

$$-(d(x)u'(x))' = 0, \quad -L < x < L; \quad u(-L) = g_0, \; u(L) = g_1.$$

Yttertemperaturerna g_0, g_1 samt värmeledningsförmågan $d(x)$ i isoleringsmaterialet är givna. Uppgiften är att bestämma en effektiv värmeöverföringskoefficient k sådan att värmeflödet genom väggen kan skrivas $j = k(g_0 - g_1)$, jämför (9).

Lös först problemet symboliskt (för hand) då $d(x) = \epsilon$ och då $d(x) = \epsilon(1 + (\beta x)^2)$, ϵ och β är positiva parametrar.

Lös sedan randvärdesproblemet numeriskt med Matlab-programmet Adfem, se "Adfem manual" i slutet av detta häfte. För att beräkna värmeflödet $j(x) = -d(x)u'(x)$ gör vi så här: Nodvärdena av den beräknade temperaturen finns i vektorn `u`, nätstorleken finns i vektorn `h`. Om vi bildar differensen mellan konsekutiva u-värden med programmet `diff` (`>> help diff`) och dividerar med h-värdena, så får vi temperatur-derivatan u'. Den är en styckvis konstant funktion och fås alltså i vektorn `diff(u)./h`. Värdena av värmeledningskoefficienten i mittpunkterna på elementen finns i vektorn `d`. Värmeflödet ges alltså av `q=-d.*diff(u)./h`. Testa först med ett specialfall där exakta lösningen är känd, dvs välj $d(x)$ så att $u(x)$ kan beräknas symboliskt. Prova sedan med en annan värmeledningskoefficient, t ex $d(x) = 1.01 + \cos(7x/L)$. (Försök inte bestämma den exakta lösningen i detta fall.) Detta problem är svårare att lösa även för Adfem. Varför?

B2. Reaktion-diffusion. Ett ämne i gasform diffunderar in i en porös katalysator och omsätts vid isoterma och stationära betingelser. Under vissa förutsättningar beskrivs denna situation av reaktions-diffusionsekvationen, jämför (12),

$$-Dc''(x) = -kc(x), \; -L < x < L; \quad c(-L) = c(L) = c_f, \tag{13}$$

med koncentrationen $c = c(x)$ [mol/m^3] i katalysatorn, den konstanta koncentrationen c_f i omgivningen, diffusionskonstanten D [m^2/s], reaktionshastigheten k [s^{-1}], storleken L [m].

(a) Inför dimensionslösa variabler $r = x/L$, $u = c/c_f$ så att (13) övergår i

$$-u''(r) = -\phi^2 u(r), \; -1 < r < 1; \quad u(\pm 1) = 1, \tag{14}$$

där ϕ kallas Thiele-modulen. Uttryck ϕ i de givna storheterna.

(b) Visa att, på grund av symmetri, (14) är ekvivalent med

$$-u''(r) = -\phi^2 u(r), \; 0 < r < 1; \quad u'(0) = 0, \; u(1) = 1. \tag{15}$$

(Funktionen u är jämn, dvs $u(-r) = u(r)$, och för varje jämn funktion gäller att derivatan är udda och därför är derivatan $= 0$ i origo.)

(c) För olika värden på ϕ vill vi undersöka dels hur långt in i katalysatorn reaktionen når, dels beräkna kvoten mellan den uppnådda reaktionshastigheten och den ideala reaktionshastighet man skulle få utan hindrande diffusion, dvs om $c = c_f$. Denna kvot kallas effektivitetsfaktorn och ges alltså av

$$\eta = \frac{\int_{-L}^{L} kc\,dx}{\int_{-L}^{L} kc_f\,dx} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u\,dr. \tag{16}$$

Visa att $\eta = u'(1)/\phi^2$. Tolka detta fysikaliskt.

(d) Lös (15) exakt och bestäm och plotta η som funktion av ϕ.

(e) Lös (15) numeriskt med programmet Adfem i Matlab och bestäm η för några olika värden på ϕ (små och stora). Jämför med exakta lösningen i (d). Tips: Funktionsvärdena $u(r_i)$ till lösningen finns i vektorn `u`, beräkningsnoderna r_i i vektorn `x` och nätstorleken h_i i vektorn `h`. Kommandot `integrate(u,h)` beräknar integralen $\int_0^1 u(r)\,dr$.

(f) Varianter för den ambitiöse teknologen (frivilligt). Gå och gör sammalunda för någon av följande varianter. (i) Robins randvillkor:

$$u'(0) = 0,\ u'(1) + \nu(u(1) - 1) = 0.$$

(ii) Tät kärna: (med $0 < \omega < 1$)

$$-u''(r) = -\phi^2 u(r),\ \omega < r < 1; \quad u'(\omega) = 0,\ u(1) = 1.$$

(iii) Förgiftning: (med $0 < \omega < 1$)

$$\begin{aligned} &- u''(r) = -\phi^2 u(r), \quad 0 < r < \omega, \\ &- u''(r) = 0, \quad \omega < r < 1, \\ &u'(0) = 0,\ u(1) = 1,\ u \text{ kontinuerlig i } r = \omega. \end{aligned}$$

Have fun! /SL