

## Övningsuppgifter IV

MAN 230

6/2 2008

- 1 Beräkna längden av kurvan given av  $(t^2, t^3)$  mellan punkterna  $(0, 0)$  och  $(1, 1)$
- 2 Nivåkurvan  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$  på ellipsoiden

$$12^2x^2 + 3^2y^2 + 4^2z^2 = 13^2$$

innehåller punkten  $(1, 1, 1)$  finn tangentlinjen till nivåkurvan i denna punkt.

- 3 Finn det maximala och minimala värdet av funktionen

$$xye^{-4(x^4+y^4)}$$

- 4 Maximera och minimera funktionen

$$x^3 - 3xy^2$$

på enhetsskivan  $x^2 + y^2 \leq 1$

- 5 Maximera och minimera funktionen

$$x^4 + y^4 + x^3y + xy^3$$

på kvadraten  $|x| + |y| = 1$

6 Ett rätblock (rätvinklig parallelepiped) har den total arean av sina sex sidor lika med 1. Finn den maximala volymen.

- 7 Finn normalen till ellipsen

$$x^2 + 2y^2 = 3$$

i punkten  $(1, 1)$  samt dess snitt med storaxeln.

8 En funktion  $F(x, y)$  säges vara harmonisk om den satisfierar den så kallade Laplace ekvationen

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

- a) Visa att varje linjär funktion  $z = ax + by + c$  är harmonisk
- b) Bestäm villkor på  $a, b, c$  för att funktionen

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

skall vara harmonisk. Speciellt finn en bas för sådana kvadratiske harmoniska funktioner.

b\*) Finn en bas för alla harmoniska former av grad tre i två variabler.

c) Om  $p$  är en kritisk punkt till en harmonisk funktion, visa att den kan aldrig vara ett lokalt maximum eller minimum

9 Bestäm konstanten  $a$  så att funktionen

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{a \frac{x^2}{t}}$$

satisfierar värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

10 \* Låt

$$\Sigma(\theta, \psi) = (\cos \psi \cos \theta, \cos \psi \sin \theta, \sin \psi)$$

vara avbildningen som ger sfäriska ko-ordinater på enhetsfären.

Beräkna

$$\lim_{|A_p| \rightarrow 0} \frac{|\Sigma(A_p)|}{|A_p|}$$

där  $A_p$  är små omgivningar kring punkten  $p$  och  $|*|$  betecknar area.

11 \* Inversionsavbildningen (eller spegling i enhets-cirkeln) ges av

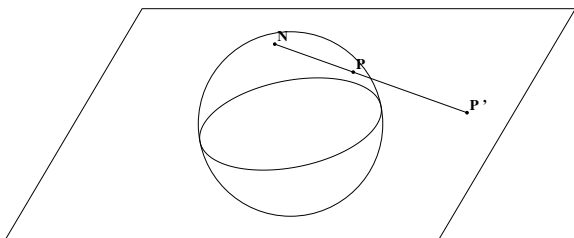
$$(x, y) \rightarrow \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

eller i kompaktare vektor-notation för  $v \in \mathbf{R}^2(0, 0)$   $v \rightarrow \frac{v}{|v|^2}$

a) Beräkna dess funktional determinant

b) Diagonalisera dess differential

12 \* Stereografisk projektion är en kartprojektion som till varje punkt given av  $P = (x, y, z)$  på enhetsfären  $S$  och skild ifrån nordpolen  $N = (0, 0, 1)$  anordnar en punkt  $P'$  i planet  $\Pi$  givet av  $z = 0$  genom att skära linjen  $NP$  med  $\Pi$ .



a) Skriv ner den explicita bilden av punkten

$(x, y, z) \in S$  på planet  $\Pi$

b) Skriv ner differentialen som en linjär avbildning mellan  $\mathbf{R}^3$  och  $\mathbf{R}^2$

c) Genom att införa sfäriska ko-ordinater  $(\theta, \psi)$  uttryck den stereografiska avbildningen som en avbildning mellan  $\mathbf{R}^2$  och  $\mathbf{R}^2$ .

d) Visa att om  $v, w$  tillhör tangentplanet  $T_P$  till sfären  $S$  i punkten  $P$  gäller att

$$\langle \Phi(v), \Phi(w) \rangle = \lambda_P \langle v, w \rangle$$

där  $\Phi$  betecknar den stereografiska avbildningen och  $\lambda_P$  är en konstant som bara beror av  $P$ . Man säger att  $\Phi$  är konform.