

Övningsuppgifter VI

MAN 230

25/2 2006

1 En skulptur har formen av en solid paraboloid. Närmare bestämt, betrakta rotationskroppen given av rotationen av parabeln $y = 12 - 3x^2$ runt y-axeln. Om skulpturens höjd är 12 meter, finn dess tyngdpunkt.

2 Beräkna medelhöjden av funktionen $z = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}(x^2 + y^2)\right)$ över cirkelskivan med radien 1.

3 Beräkna den totala rotationsenergin hos jorden. Jorden antas vara ett homogent solitt klot med radien $2^6 \times 10^2$ km och tätheten $5 \text{ ton}/\text{m}^3$ och rotationstiden 24 timmar.

4 Beräkna arean av en 'rektangel' på jordytan begränsad av latituderna 60° och 61° och longituderna 0° och 1° och jämför med en rektangel vars höjd är den longitudiella avståndet och vars bredd är medelvärdet av de två latitudella sidorna.

5 Finn en formel som anger omkretsen och arean av en cirkel med radien θ på en sfär med radien 1.

6 Roter kurvan $y = \sin x$ över intervallet $[0, \pi]$ runt x-axeln och beräkna arean av den genererade rotationsytan.

7 Beräkna medelavståndet av avståndet i kvadrat för punkter i

a) en kvadrat med sidan ett

b) en cirkel med radien ett

8 Sätt upp en integral som anger hur stor del av alla punktpar (p, q) där p, q tillhör enhetsskivan, har avståndet minst ett ifrån varandra.

9 Enligt Newtons tyngdlag så attraherar två punktmassor varandra med en kraft riktad längs dess förbindningslinje proportionell mot produkten av deras massor och inverst mot avståndet i kvadrat.

a) Beräkna den totala kraften på en partikel innesluten i ett sfäriskt skal.

b) Beräkna den totala kraften på en partikel utanför ett sfäriskt skal.

c) ur b) slut den totala attraktionskraften av ett homogent klot med radien R och massan M (och gravitationskonstanten G).

10 Ljusstyrkan hos en ljuskälla avtar med kvadraten på avståndet. Antag att universum är oändligt och att ljuskällorna är homogent placerade, d.v.s. antalet ljuskällor i ett sfäriskt skal är proportionellt mot skalets yta gånger dess tjocklek. Antag att alla ljuskällorna är av samma ljusstyrka. Beräkna den totala ljusstyrkan i en fix punkt.

Ett exempel kan vara stjärnor av samma ljusstyrka (säg solens) belägna i heltal-spunkter (x, y, z) med enheten säg ett ljusår.