Facit till Övningsuppgifter III

MAN 230
2/2 2006

1 a) indefinit
b) positivt definit
c) negativt definit
d) positivt semi-definit
e) postivt definit

2 Den kvadratiska formen $x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2$ är positivt definit. Således är nivåkurvorna begränsade, och därmed ellipser (såvida de inte består av en enda punkt eller är tomma).

Vi finner t.ex att

$$x + \frac{1}{2}y = \cos(t)$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(t)$$

Varav vi finner

$$x = \cos(t) - \frac{\sqrt{3}}{4}\sin(t)$$
$$y = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(t)$$

Vi kan nu antingen finna maximum och minimum av funktionen $x^2 + y^2$ uttryckt i trigonometriska funktioner och dubbla dess kvadratrötter, eller använda linjär algebra och finna ortogonala egenvektorerna till den symmetriska matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Vilket leder till

$$\frac{3}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2 = 1$$

Varav vi lätt inser att storaxlen har längd 2 och lillaxeln längd $2/\sqrt{3}$

3 Vi skall i samtliga deluppgifter nedan betrakta den kvadratiska formen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2$$

med de partiella derivatorna evaluerade i de kritiska punkterna.

a)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} =& -12xy \\ \frac{\partial f}{\partial y} =& 6(2y+1)^2 - 6x^2 = 6(2y+1+x)(2y+1-x)\end{aligned}$$

Om $xy = 0$ har vi att $x = 0$ eller $y = 0$. Sätt in dessa värden i den andra ekvationen och vi finner i det första fallet den kritiska punkten $(0, \pm\frac{1}{2})$ $((2y+1) = 0)$ i det andra fallet $(\pm 1, 0)$ $(6x^2 = 6)$

Andraderivatorna ger

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -12y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -12x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 24(2y+1)\end{aligned}$$

Vi erhåller således

punkt	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	kvadratisk form	typ
$(0, -\frac{1}{2})$	6	0	0	$6h^2$	pos.semidef.
$(1, 0)$	0	-12	24	$-24hk + 24k^2$	indefinit
$(-1, 0)$	0	12	24	$24hk + 24k^2$	indefinit

b)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} =& (-2x(x-y)+1)e^{-(x^2+y^2)} \\ \frac{\partial f}{\partial y} =& (-2y(x-y)-1)e^{-(x^2+y^2)}\end{aligned}$$

För att bägge skall vara noll inser vi att $x = -y$ (eftersom $x = \frac{1}{2(x-y)} = -y$) vilket leder till ekvationen $4y^2 = 1$ således de två kritiska punkterna $\pm(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

Andraderivatorna ges av

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= (-2x(-2x(x-y)+1) - 2(x-y) - 2x)e^{-(x^2+y^2)} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= (-2y(-2x(x-y)+1) - 2x)e^{-(x^2+y^2)} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= (-2y(-2y(x-y)-1) - 2(x-y) + 2y)e^{-(x^2+y^2)}\end{aligned}$$

och således

punkt	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	kvadratisk form	typ
$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$-e^{-\frac{1}{2}}$	$-e^{-\frac{1}{2}}$	$-e^{-\frac{1}{2}}$	$-e^{-\frac{1}{2}}h^2 - 2e^{-\frac{1}{2}}hk - e^{-\frac{1}{2}}k^2$	neg.semidef.
$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$e^{-\frac{1}{2}}h^2 + 2e^{-\frac{1}{2}}hk + e^{-\frac{1}{2}}k^2$	pos.semidef.

c)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} =& y - 3x^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} =& x - 3y^2 \end{aligned}$$

Varav fås ekvationen $y = 3(3y^2)^2 = 27y^4$ Med de två lösningarna $y = 0$ och $y = \frac{1}{3}$, och därmed de två kritiska punkterna $(0,0), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -6x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -6y \end{aligned}$$

och

punkt	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	kvadratisk form	typ
(0.0)	0	1	0	$2hk$	indefinit.
$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	-2	1	-2	$-2h^2 + 2hk - 2k^2$	neg.def(max).

d)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} =& 2x \cos(x^2 + y^2) \\ \frac{\partial f}{\partial y} =& 2y \cos(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

De kritiska punkterna blir $(0,0)$ och cirklarna $\frac{\pi}{2} + n\pi$ med $n \geq 0$(d.v.s. där $\cos(x^2 + y^2) = 0$)

Andraderivatorna är givna av

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -4x^2 \sin(x^2 + y^2) + 2\cos(x^2 + y^2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -4xy \sin(x^2 + y^2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -4y^2 \sin(x^2 + y^2) + 2\cos(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Samtliga av dessa är noll vid origo $(0,0)$ således har vi en noll-form.

För de andra punkterna gäller $\sin(x^2+y^2) = \pm 1, \cos(x^2+y^2) = 0$ således har vi formerna

$$\pm(4x^2h^2 + 8xyhk + 4y^2k^2) = \pm 4(xh+yk)^2$$

som alla är semidefinita

4

a)

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} =& f'(x) \\ \frac{\partial F}{\partial y} =& g'(y)\end{aligned}$$

Således alla punkter (x_0, y_0) där x_0 en kritisk punkt för f och y_0 en kritisk punkt för $f(y)$.

Vidare om f och g har lokala minima för x_0 och y_0 respektive, har $F(x,y)$ ett lokalt minimia för (x_0, y_0), analogt för lokala maxima. Däremot om $f(x)$ har säg ett lokalt maximum för x_0 och $g(y)$ ett lokalt minimum för y_0 har $F(x,y)$ en sadelpunkt för (x_0, y_0)

b)

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} =& f'(x)g(y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} =& g'(y)f(x)\end{aligned}$$

för en kritisk punkt (x_0, y_0) gäller x_0 är en kritisk punkt för f eller y_0 ett nollställe för g samt y_0 en kritiskt punkt för g eller x_0 ett nollställe för f. Detta kan låta krångligt. Vi kan ta ett exempel där $f(x) = x^2 - 1$ med kritisk punkt 0 och nollställen ± 1 och $g(y) = (y-2)^2 - 1$ med kritiskt punkt $y = 2$ och nollställen $3, 1$. De kritiska punkterna för

$$F(x,y) = (x^2-1)((y-2)^2-1) = x^2y^2 - 4x^2y + 3x^2 - y^2 + 4y - 3$$

blir $(0,2)(3,1),(3,-1)(1,1)(1,-1)$

5 Notera att denna funktion är väldefinerad också vid polerna där θ inte är väldefinerad.

Vi finner som ovan

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta} &= 20\cos\theta\cos\psi \\ \frac{\partial}{\partial\psi} &= -20\sin\theta\sin\psi\end{aligned}$$

De kritiska punkterna utgöres av polerna $\psi = \pm\pi/2$ (notera att θ kan tagas som 0 och π för dessa punkter), samt $\theta = \pi/2, 3\pi/2, \psi = 0$. Det första fallet ger ett högtryck (= 780), det andra fallet ett lågtryck (= 740). Vid polerna har man sadelpunkter eftersom $\sin\theta\cos\psi$ antar både postiva och negativa värden där.

6

Vi skall maximera xyz där $3(x+y+z) = 1$ d.v.s. $z = \frac{1}{3} - x - y$ således reduceras vi till funktionen

$$\frac{1}{3}xy(1 - 3(x+y))$$

Vi beräknar gradienten

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{3}(y(1 - 3(x+y)) - 3xy \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{1}{3}((x(1 - 3(x+y)) - 3xy\end{aligned}$$

Den kritiska punkten infaller för $(\frac{1}{9}, \frac{1}{9})$. Andra derivatorna ges av

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -6y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= 1 - 6x - 6y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -6y\end{aligned}$$

Och i den kritiska punkten får vi det kvadratiska polynomet

$$-\frac{2}{3}(h^2 + hk + k^2)$$

som uppenbarligen är negativt definit, och således ett (lokalt) maximum.

Vi erhåller således ett maximum i fallet av en kub med sidan $\frac{1}{3}$