Facit till Övningsuppgifter IV

MAN 230
13/2 2006

1 $x(t) = t^2, y(t) = t^3$ ger $|x'(t) + y'(t)| = \sqrt{4t^2 + 9t^4}$. Vidare eftersom vi har att $(x(0), y(0)) = (0, 0)$ och $(x(1), y(1)) = (1, 1)$ ges gränserna av $t = 0, 1$. Längden berälnas därmed av integralen

$$\int_0^1 \sqrt{4t^2 + 9t^4}dt = \int_0^1 2t\sqrt{1 + \frac{9}{4}t^2}dt$$

Variabelbytet $u = \frac{9}{4}t^2$ ger $\frac{9}{2}tdt = du$ och således integralen

$$\int_0^{\frac{9}{4}} \frac{4}{9}\sqrt{1+u}du = \frac{4}{9}\frac{2}{3}(1+u)^{\frac{3}{2}}|_0^{\frac{9}{4}}$$

2 Gradienten till $x^2 + y^2 + z^2$ är $(2x, 2y, 2z)$ vars värde i $(1, 1, 1)$ är $(2, 2, 2)$. På sammma sätt erhålles gradienten $(2 \times 12^2 x, 2 \times 3^2 y, 2 \times 4^2 z$ med värdet $2 \times 12^2, 2 \times 3^2, 2 \times 4^2$. Tangenten kommer att vara normal till dessa bägge vektorer. En sådan vektor kan fås genom kross-produkten definerade av minorerna (med lmpligt tecken av

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 144 & 9 & 16 \end{vmatrix}$$

Vilket ger $((16 - 9), -(16 - 144), (9 - 144)) = (7, 128, -135)$ och därmed linjen $(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(7, 128, -35)$

3 Vi noterar att om $x^2 + y^2$ är tillräckligt stort är $xye^{-4(x^2+y^2)}$ tillräckligt litet. Funktionen antar således sitt största och minsta värde inom någon stor cirkel. Dessa värden kommer då att antages vid kritiska punkter.

Vi finner de kritiska punkterna genom att sätta gradienten lika med noll. D.v.s

$$ye^{-4(x^4+y^4)} - 4x^3xye^{-4(x^4+y^4)} = 0$$
$$xe^{-4(x^4+y^4)} - 4y^3xye^{-4(x^4+y^4)} = 0$$

Detta leder till

$$1 = 16x^2$$
$$1 = 16y^2$$

Med punkterna $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}$ samt till det uppebara $x = 0, y = 0$.

Det är nu bara att sätta in dessa värden vilket leder till maximum $\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}}$ och minimum $-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}}$

4 Gradienten ges av $(3x^2 - 3y^2, -6xy)$. Den inre kritiska punkten är således $(0, 0)$. Gradienten av randen ges av $(2x, 2y)$ och vi skall nu finna de punkter på denna sådana att

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3y^2 &= \lambda 2x \\ -6xy &= \lambda 2y \end{aligned}$$

Vi finner att antingen $y = 0$ eller att $\lambda = -3x$. Det senare alternativet leder till $9x^2 = 3y^2$ d.v.s $y = \pm\sqrt{3}x$. Dessa punkter skall ligga på enhetscirkeln, d.v.s vi skall snitta dem med de tre linjerna vi har kommit upp med. Snitt-punkterna inses lätt vara $(\pm 1, 0)$ samt $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ m.a.o. punkterna på en regelbunden sex-hörning (hexagon).

5 Gradienten ges av $(4x^3 + 3x^2y + y^3, 4y^3 + 3y^2x + x^3)$. Inre kritiska punkter ges av $4x^3 + 3x^2y + y^3 = 4y^3 + 3y^2x + x^3 = 0$. Subtraherar vi de båda första får vi speciellt $0 = 3x^3 + 3xy(x - y) - 3y^3 = 3(x - y)(x^2 + 2xy + y^2) = 3(x - y)(x + y)^2$ vilket leder till $x = y$ som ger en kritisk linje av punkter, medan $x = -y$ ger en icke-försvinnande gradient och förkastas.

Kvadraten begränsas av linjerna $y = x + \pm 1$ samt $y = -x + pm1$ med gradienterna $(1, -1)$ och $(1, 1)$ respektive. Detta leder till

$$\begin{aligned} 0 &= (4x^3 + 3x^2y + y^3) + (4y^3 + 3y^2x + x^3) = 5x^3 + 3xy(x + y) + 5y^3 \\ 0 &= (4x^3 + 3x^2y + y^3) - (4y^3 + 3y^2x + x^3) = 3x^3 + 3xy(x - y) - 3y^3 \end{aligned}$$

Den andra ekvationen har vi redan behandlat, vi erhåller de kritiska punkterna som skärningen mellan linjerna $x = y$ och $x + y = \pm 1$

För den första ekvationen observerar vi att vi kan bryta ut faktorn $(x + y)$ och skriva $(x + y)(5x^2 + 5y^2 - 5xy + 3xy) = (x + y)(5x^2 - 2xy + 5y^2)$ där den kvadratiska faktorn alltid är positiv. Dock linjen $x = -y$ har ingen skärning med linjerna $x = y \pm 1$.

På linjen $x = -y$ antar funktionen det konstanta värdet 0. På linjen $x = y$ får vi funktionen $4x^4$ som antar maxvärdet $\frac{1}{4}$ för $x = \pm\frac{1}{2}$. Slutligen betraktar vi hörnpunkterna $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ Maxvärde 1 minvärde 0.

6 Låt kanterna ha längderna x, y, z. Vi skall nu maximera xyz under bivillkoret att den totala ytan $2(xy + yz + zx) = 1$. Detta leder till

$$\begin{aligned} 2(y + z) &= \lambda yz \\ 2(x + z) &= \lambda xz \\ 2(x + y) &= \lambda xy \end{aligned}$$

Vi kan t.ex. multiplicera första ekvationen med x andra med y och tredje med z. Högerleden blir då lika och vi finner ekvationerna

$$\begin{aligned} xy + xz &= xy + yz \\ xy + xz &= xz + yz \end{aligned}$$

med lösningen $xy = yz = zx$ vilket leder till $x = y = z$. Således fås $6x^2 = 1$ (bivillkoret) och därmed $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$ och således den maximala volymen för kuben $x^3 = \frac{1}{6\sqrt{6}}$

7 Gradienten är given av $(2x, 4y)$ vilket i punkten $(1, 1)$ blir $(2, 4)$. Normalens riktning blir således $(2, 4)$ (eller $(1, 2)$ om man så vill). En ortogonal riktning är $(-2, 1)$. Normalens ekvation är således av formen $-2x + y = C$. Sätt in $(1, 1)$ och vi finner $-2x + y = -1$ eller $y = 2x - 1$. Storaxeln ligger längs x-axeln, sätt $y = 0$ och vi finner $x = \frac{1}{2}$

8 a) Alla andra derivator av en linjär funktion försvinner. Det hela är således trivialt.

b) Vi erhåller $\Delta F = 2a + 2c$ således ä villkorte $a = -c$. En enkel bas är given av de kvadratiska formerna $x^2 - y^2$ och xy

c) Beräkna den kvadratiska formen och finn att vi alltid får något indefinit.

Fortsättning följer senare