Facit till Övningsuppgifter V

MAN 230
26/2 2007

1

a) $\int_0^{\sqrt{\pi/2}}\int_0^{\sqrt{\pi/2}} y\sin(xy) = \int_0^{\sqrt{\pi/2}}(-\cos(xy)|_0^{\sqrt{\pi/2}}dy = \int_0^{\sqrt{\pi/2}}(1-\cos(\sqrt{\pi/2}y)dy = y - \frac{1}{\sqrt{\pi/2}}\sin(\sqrt{\pi/2}y)|_0^{\sqrt{\pi/2}} = \sqrt{\pi/2} - \frac{1}{\sqrt{\pi/2}}$

b) $\int_0^1\int_0^1 xye^{x^2y} = \int_0^1 \frac{1}{2}e^{x^2y}|_0^1 dy = \int_0^1 \frac{1}{2}(e^y-1)dy = \frac{1}{2}(e^y-y)|_0^1 = \frac{1}{2}e-1$

c) $\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{xy}} = \int_0^1(\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{xy}}dx)dy$ Gör substitutionen $xy=t^2$ vilket ger $dx = \frac{2}{y}tdt$ med gränserna $t=0$ och $t=\sqrt{y}$. Den första integreringen ger då $\frac{2}{y}\int_0^{\sqrt{y}}\frac{t}{1+t}dt$. Notera att $\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$ således skall vi integrera $\int_0^1 \frac{2}{y}(\sqrt{y} - \ln(1+\sqrt{y}))dy$ Den första termen ger inga problem $4y^{\frac{1}{2}}|_0^1 = 4$. Den andra termen lämnar vi därhän.

d) $\int\int_D \sin(x^2) = \int_0^1(y\sin(x^2)|_0^x dx = \int_0^1 x\sin(x^2)dx = -\frac{1}{2}\cos x^2|0^1 = \frac{1}{2}(1-\cos 1)$

e) $\int\int_D xy^2 = \int_{-1}^1(\frac{1}{2}x^2y^2|_0^{\sqrt{1-y^2}}dy = \int_{-1}^1\frac{1}{2}(y^2(1-y^2)) = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5)|_{-1}^1 = \frac{1}{3}-\frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ alternativt ger införandet av polära ko-ordinater

$\int\int_D xy^2dxdy = \int_0^1\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(r\cos\theta r^2\sin^\theta)rdrd\theta = \int_0^1\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^4\cos\theta\sin\theta drd\theta = \int_0^1 r^4dr\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\sin^2\theta d\theta = (\frac{1}{5}r^5|_0^1)(\frac{1}{3}\sin^3\theta|_{-pi/2}^{\pi/2}) = \frac{1}{5}\frac{2}{3} = \frac{2}{15}$

f) Parablen $y=x^2$ skär linjen $y=1$ i punktern $(\pm 1, 1)$. Vi skriver således $\int\int_D x^3e^{xy} = \int_{-1}^1(\int_{x^2}^1(x^3e^{xy}dy)dx$ och erhåller
$\int_{-1}^1(x^2e^{xy}|_{x^2}^1 dx = \int_{-1}^1(x^2e^x - x^2e^{x^3}dx$ Den första termen erhålles genom partiell integration $\int_{-1}^1 x^2e^xdx = x^2e^x|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 2xe^x = e - e^{-1} - 2xe^x|_{-1}^1 + 2\int_{-1}^1 e^x = e - e^{-1} - 2e - 2e^{-1} + 2(e-e^{-1}) = e - 5e^{-1}$. Den andra termen genom $\frac{1}{3}e^{x^3}|_{-1}^1 = \frac{1}{3}(e-e^{-1})$. Sedan är det bara att lägga ihop.

g) Integralen $\int\int_D x^2-xy+y^2dxdy$ där given av skillnaderna av integralerna $\int_{-1}^1\int_{-1}^1(x^2-xy+y^2)dxdy$ och $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} x^2-xy+y^2dxdy$. Betrakta integralen $\int_a^b\int_c^d(x^2-xy+y^2)dxdy = \int_a^b(x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3|_c^d)dx = \int_a^b(x^2(d-c) - \frac{1}{2}xy(d^2-c^2) + \frac{1}{3}(d^3-c^3)dx = \frac{1}{3}x^3(d-c) - \frac{1}{4}x^2y^2(d^2-c^2) + \frac{1}{3}x(d^3-c^3)|_a^b = \frac{1}{3}(b^3-a^3)(d-c) - \frac{1}{4}(b^2-a^2)(d^2-c^2) + \frac{1}{3}(b-a)(d^3-c^3)$. I det första faller får vi $\frac{8}{3}$ i det andra fallet ett något mera komplicerat uttryck.

h) Via polära ko-ordinater reducerar vi till integralen
$\int_0^{2\pi}\int_1^2(r^2)^4rdr = 2\pi\int_1^2 r^9dr = 2\pi(\frac{r^{10}}{10}|_1^2 = 2\pi(1023/10)$

i) Området D består faktiskt av två områden belägna i den första och tredje kvadranten respektive, symmetriska med avseende på spegling i origo (d.v.s.) invariant under $(x, y) \to (-x, -y)$. Låt oss begränsa oss till en.

Betrakta avbildningen given av $u = x^2 - y^2, v = xy$. Den avbildar D på kvadraten K begränsad av linjerna $u = 1, 2, v = 1, 2$[1] Dess Jacobian $\frac{dudv}{dxdy}$ är given av $2(x^2+y^2)$. Vi kan därmed skriva $\int\int_D (x^2+y^2)^3 dxdy = \int\int_K (x^2+y^2)^3 \frac{dxdy}{dudv} dudv = \int\int_K (x^2+y^2)^2 dudv$ där integranden skall betraktas som en funktion av u, v. Vi finner att $u^2 = (x^2-y^2)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4$ således $u^2 + 4v^2 = (x^2+y^2)^2$. Vi har nu reducerat till integralen $\int\int_K u^2 + 4v^2 dudv = \int_1^2 \int_1^2 u^2 + 4v^2 dudv$ vilken lätt evalueras $\int_1^2 dv \frac{1}{3} u^3|_1^2 + \int_1^2 du \frac{4}{3} v^3|_1^2 = \frac{5}{24}$

j) $\int\int_D \cos(x^2 + xy + y^2)$ där D är givet av olikheten $x^2 + xy + y^2 \leq 1$ Ledning: Betrakta exempel 18 sidan 271. Problemet är att beräkna areorna för ellipserna $x^2 + xy + y^2 \leq u$

2 Beräkna följande trippelintegraler

a) $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 xy^2z^3 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} x^2y^2z^3|_0^1 dydz = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} y^2z^3 dydz = \int_0^1 \frac{1}{6} y^3z^3|_0^1 dz = \int_0^1 \frac{1}{24} z^4|_0^1 = \frac{1}{24}$

b) Rymdpolära ko-ordinater ger

$$\int\int\int_D \frac{1}{1-(x^2+y^2+z^2)} = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{r^2 \sin\psi}{1-r^2} = 2\pi \int_0^{\pi} \sin\psi d\psi \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{r^2}{1-r^2} dr$$

Vi har $\int_0^{\pi} \sin\psi d\psi = -\cos\psi|_0^{2\pi} = 2$ och $\frac{r^2}{1-r^2} = \frac{1}{1-r^2} - 1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{1+r} + \frac{1}{1-r}) - 1$ således $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{r^2}{1-r^2} dr = \ln\sqrt{1-r^2} - r|_0^{\frac{1}{2}} = \ln(\sqrt{3}/4) - \frac{1}{2}$ således blir integralen $4\pi(\ln(\sqrt{3}/4) - \frac{1}{2})$

c)Integrerar vi med avseende på z reducerar vi till dubbelintegralen $\int\int_D (x+y+2)dxdy$ polära ko-ordinater ger $\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2(\cos\theta + \sin\theta) + 2rdrd\theta$ vilken blir summan av produkterna

$$(\int_0^{2\pi} \cos\theta + \sin\theta d\theta)(\int_0^1 r^2 dr) + 2\pi \int_0^1 2rdr = 0 + r^2|_0^1 = 2\pi$$

3 Genom införande av polära eller sfäriska ko-ordinater så transformeras integralerna till

a) $\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{2k} r dr$

b) $\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^{2k} r^2 \sin\psi$

c) $\int_1^{\infty} \int_0^{2\pi} r^{2k} r dr$

d) $\int_1^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^{2k} r^2 \sin\psi$

Notera att $\int_\epsilon^1 t^a = \frac{t^{a+1}}{a+1}|_\epsilon^1$ således konvergerar intergalen precis när $a > -1$ medan $\int_1^1 t^N = \frac{t^{a-1}}{a+1}|_1^N$ och konvergens inträffar när $a < -1$.

---

[1] Den avbildar bägge komponenterna av D på K, avbildningen är inte injektiv utan $2:1$

Vi får då

a) $(2k+1) > -1$ d.v.s $k > -1$ b) $2k+2 > -1$ d.v.s. $k > -\frac{1}{2}$ c) $2k+1 < -1$ d.v.s. $k < -1$ d) $2k+2 < -1$ d.v.s. $k < -\frac{1}{2}$

4 Beräkna ytan av grafen $z = x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}$ över kvadraten $0 \leq x, y \leq 1$ Vi har

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}$$

Arean ges av dubbelintegralen
$\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x + \frac{9}{4}y} dxdy =$
$\int_0^1 \frac{8}{27} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x + \frac{9}{4}y}^3 |_0^1 dy =$
$\frac{8}{27}\frac{8}{45}(\sqrt{1 + \frac{9}{4} + \frac{9}{4}y}^5 - \sqrt{1 + \frac{9}{4}y}^5)|_0^1 = \frac{8}{27}\frac{8}{45}(\sqrt{1 + \frac{9}{4} + \frac{9}{4}}^5 - \sqrt{1 + \frac{9}{4}}^5 - \sqrt{1 + \frac{9}{4}}^5 + 1) = \frac{64}{1215}\frac{1}{2}(\sqrt{22^5} - 2\sqrt{14^5} + 1)$