Facit VI

MAN 230
26/2 2008

1 *En skulptur har formen av en solid paraboloid. Närmare bestämt, betrakta rotationskroppen given av rotationen av parabeln $y = 12 - 3x^2$ runt y-axeln. Om skulpturens höjd är 12 meter, finn dess tyngdpunkt.*

Paraboloiden P ges av $y = 12 - 3(x^2 + z^2)$. När $y = 0$ har vi således $3(x^2 + z^2) = 12$ d.v.s en cirkel av radien 2. Av symmetriskäl försvinner momenten för x och z, återstår y-momentet givet av trippellintegralen

$$\int\int\int_P y dx dy dz$$

genom att fixera x, z och integrera med avseende på y reduceras till dubbelintegralen

$$\int\int_{x^2+z^2\leq 4}(\int_0^{12-3(x^2+z^2)} y dy) dx dz = \int\int_{x^2+z^2\leq 4} \frac{1}{2}(12 - 3(x^2 + z^2)) dx dz$$

genom att införa polära ko-ordinater erhåller vi

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 (\frac{1}{2}(12 - 3r^2)^2 r dr d\theta = 2\pi(-\frac{1}{18}\frac{1}{2}(12 - 3r^2)^3|_0^2) = 96\pi$$

För att finna tyngdpunkten behöver vi också finna massan av P denna ges på samma sätt lätt av dubbelintegralen

$$\int\int_{x^2+z^2\leq 4}(12 - 3(x^2 + z^2)) dx dz$$

och via polära ko-ordinater transformeras denna till

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 (12 - 3r^2) r dr d\theta = 2\pi(-\frac{1}{2}\frac{1}{6}(12 - 3r^2)^2|_0^2) = 24\pi$$

Tyngdpunkten återfinnes således i punkten $(0, \frac{96\pi}{24\pi}, 0) = (0, 4, 0)$

2 *Beräkna medelhöjden av funktionen $z = \sin^2(\frac{\pi}{2}(x^2 + y^2))$ över cirkelskivan med radien* 1.

Vi skall finna en cylinder över cirkelskivan med den konstanta höjden h och med samma volym som kroppen under funktionsgrafen. D.v.s.

$$\pi h = \int\int_{x^2+y^2\leq 1} \sin^2(\frac{\pi}{2}(x^2 + y^2)) dx dy$$

Integralen beräknas lätt med polärt ko-ordinatbyte

$$\int\int_{x^2+y^2\leq 1} \sin^2(\frac{\pi}{2}(x^2+y^2)) dx dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sin^2(\frac{\pi}{2}r^2) r dr d\theta = 2\pi\int_0^1 \sin^2(\frac{\pi}{2}r^2) r dr$$

Genom ko-ordinatbytet $s = \frac{r^2}{2}$ erhåller vi

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^2(\pi s) ds$$

Utnyttja $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$ således

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^2(\pi s) ds = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-\cos 2\pi s}{2} = \frac{1}{2}s - \frac{1}{4\pi}\sin 2\pi s|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

Vi sluter då att $h = \frac{\frac{1}{4}2\pi}{\pi} = \frac{1}{2}$

3 *Beräkna den totala rotationsenergin hos jorden. Jorden antas vara ett homogent solitt klot med radien $2^6 \times 10^2$ km och tätheten $5ton/m^3$ och rotationstiden 24 timmar.*

En punktmassa med massan m och hastigheten v har rörelse-energin $\frac{m<v.v>}{2}$. Rörelseenergin hos ett roterande homogent klot K (d.v.s. av konstant täthet ρ) gives således av integralen

$$\int\int\int_K \rho(x^2+y^2)\omega^2 dxdydz$$

om vi låter den rotera kring z-axeln, och ω är rotationshastigheten, d.v.s. Partiklarna rör sig via $(x(t), y(t)) = (r\cos(\omega t), r\sin(\omega t))$.

Genom att införa cylindriska ko-ordinater

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}$$

Erhåller vi integralen

$$\int\int\int_Z \rho\omega^2 r^3 d\theta dr dz$$

Där Z är området givet av $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq R, -\sqrt{R^2-r^2} \leq z \leq \sqrt{R^2-r^2}$
Vi finner därvid

$$\int\int\int_Z \rho\omega^2 r^3 d\theta dr dz = \int_0^{2\pi}\int_0^R \rho\omega^2 r^3 2\sqrt{R^2-r^2} dr d\theta$$

Vi måste således behandla integralen

$$\int_0^R r^3 2\sqrt{R^2-r^2} dr$$

Sätter vi $t = r^2$ reducerar vi till

$$\int_0^{R^2} t\sqrt{R^2-t} dt$$

som vi behandlar med partiell integration

$$\int_0^{R^2} t\sqrt{R^2-t}dt = -\frac{2}{3}t(R^2-t)^{\frac{3}{2}}|_0^{R^2} + \int_0^{R^2} \frac{2}{3}(R^2-t)^{\frac{3}{2}} = 0 - \frac{4}{15}(R^2-t)^{\frac{5}{2}}|_0^{R^2} = \frac{4}{15}R^5$$

Den totala rörelseenergin blir då given av

$$2\pi\rho\omega^2\frac{4}{15}R^5$$

I det aktuella fallet är $\rho = 5\times 10^3 kg/m^3, \omega = 2\pi/(84'000) \sim 0.6\times 10^-4, R = 2^6\times 10^5 m$ och vi erhåller

$$0.5\times 10^{26} kgm^2/s^2$$

4 *Beräkna arean av en 'rektangel' på jordytan begränsad av latituderna 60^o och 61^o och longituderna 0^o och 1^o och jämför med en rektangel vars höjd är den longitudiella avståndet och vars bredd är medelvärdet av de två latiduella sidorna.*

Betrakta fallet med en rektangel begränsad av latituderna ψ_1, ψ_2 och longituderna θ_1, θ_2. Arean given av integralen

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\psi_1}^{\psi_2} \cos\psi d\theta d\psi$$

Vilken lätt beräknas till

$$(\theta_2-\theta_1)(\sin(\psi_2)-\sin(\psi_1)$$

vilket skall jämföras med arean av den korresponderande rektangeln på ett plan

$$\cos\psi_1(\theta_2-\theta_1)(\psi_2-\psi_1)$$

.

I vårt fall är $\theta_2-\theta_1 = \frac{2\pi}{360}$ och $\psi_2 = \frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{360}, \psi_1 = \frac{\pi}{6}$ och vi skall multiplicera med $R^2 = (6,4)^2\times 10^{12}m^2$. (Vilket är approximativt $4\times 10^{14}m^2$)

Vi kan få ett närmervärde på arean genom att utnyttja att $\sin(a+x) = \sin(a)(1-x^2/2+x64/24+\ldots)+\cos(a)(x-x^3/6+x^5/120+\ldots)$ vilket medför $\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{360})-\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}(-\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{360})^2+\ldots)+\frac{1}{2}(\frac{2\pi}{360}-\frac{1}{6}(\frac{2\pi}{360})^2+\ldots) \sim 0.004330$

De två areorna blir således (when $R=1$) $3.7789..\times 10^{-5}$ och $3.8077..\times 10^{-5}$ och om detta multipliceras med jordskalan erhåller vi $1.546323..\times 10^{10}m^2$ och $1.558118..\times 10^{10}m^2$ och skillnaden utgöres av $1.2..\times 10^8 m^2$

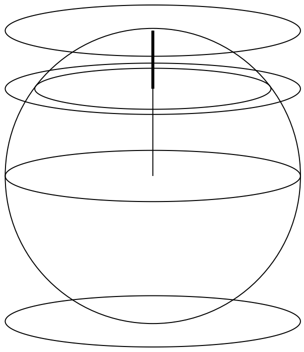
5 *Finn en formel som anger omkretsen och arean av en cirkel med radien θ på en sfär med radien* 1.

Arean av rotationen av kurvan $(x(t), y(t))$ kring x-axeln är given av integralen

$$\int 2\pi y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$$

I vårt fall $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$ och således

$$\int_0^\theta 2\pi \sin t dt = 2\pi(-\cos t|_0^\theta) = 2\pi(1-\cos\theta)$$



Notera att om sfären omskrives av en cylinder vars axel går genom den sfäriska kalottens medelpunkt, såkommer arean av den senare var lika med arean av det segment av cylindern vars höjd är lika med kalottens projektion på axeln. Detta upptäcktes redan av Arkimedes.

6 *Rotera kurvan $y = \sin x$ över intervallet $[0,\pi]$ runt x-axeln och beräkna arean av den genererade rotationsytan.*

Enligt formen ovan ges rotationsarean av

$$\int_0^\pi 2\pi \sin t\sqrt{1+\cos^2 t}dt$$

Gör substitutionen $u = \cos t$ och vi får integralen

$$-2\pi\int_1^{-1}\sqrt{1+u}du = 2\pi(\frac{2}{3}(1+u)^{\frac{3}{2}}|_1^{-1} = 2\pi 2^{\frac{3}{2}} = 4\sqrt{2}\pi$$

7 *Beräkna medelavståndet av avståndet i kvadrat för punkter i*
a) en kvadrat med sidan ett
b) en cirkel med radien ett

Låt punkterna vara guvna av (x_1,y_1) och (x_2,y_2). Den funktion vi skall beräkna medelvärdet av blir då

$$F(x_1,y_1,x_2,y_2) = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2$$

Parameterrummet blir i det första fallet alla fyrtupplar (x_1,y_1,x_2,y_2) där vi kan välja $0 \leq x_1,x_2,y_2,y_2 \leq 1$ oberoende av varandra. (D.v.s. produkten av enhetskvadraterna $0 \leq x_1,y_1 \leq 1$ och $0 \leq x_2,y_2 \leq 1$), I det andra fallet tar vi produkterna av enhetsskivorna $0 \leq x_1^2+y_1^2 \leq 1$ och $0 \leq x_2^2+y_2^2 \leq 1$ $(= U\times U)$. I första fallet är 4−dimensionella volymen av parameterrummet av punktpar 1 i det andra fallet $' \times \pi = \pi^2$.

a) ger upphov till integralen

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 dx_1dy_1dx_2dy_2$$

Vi erhåller genom att utveckla högersidan

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 dx_1dy_1dx_2dy_2$$

Denna beräknas lätt

$$\int_0^1 x_1^2 - 2\int_0^1 x_1\int_0^1 x_2 + \int_0^1 x_2^2 + \int_0^1 y_1^2 - 2\int_0^1 y_1\int_0^1 y_2 + \int_0^1 y_2^2$$

och sedan är det bara att påminna sig att $\int_0^1 t dt = \frac{1}{2}, \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$ för att erhålla värdet

$$\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 2\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 2(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}) = \frac{4}{3}$$

b) ger upphov till integralen

$$\int\int\int\int_{U \times U} x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1 y_2 + y_2^2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$$

På samma sätt som tidigare kan vi skriva den som

$$(\int\int_U x_1^2 + y_1^2 dx_1 dy_1)(\int\int_U 1 dx_2 dy_2) + (\int\int_U 1 dx_1 dy_1)(\int\int_U x_2^2 + y_2^2 dx_2 dy_2)$$

$$-2(\int\int_U x_1 dx_1 dy_1)(\int\int_U x_2 dx_2 dy_2) - 2(\int\int_U y_1 dx_1 dy_1)(\int\int_U y_2 dx_2 dy_2)$$

Vi behöver nu beräkna integralerna $(\int\int_U 1 dx dy), (\int\int_U x dx dy)$, $(\int\int_U x^2 + y^2 dx dy)$ vilket lämpligtsvis göres med polära ko-ordinater.

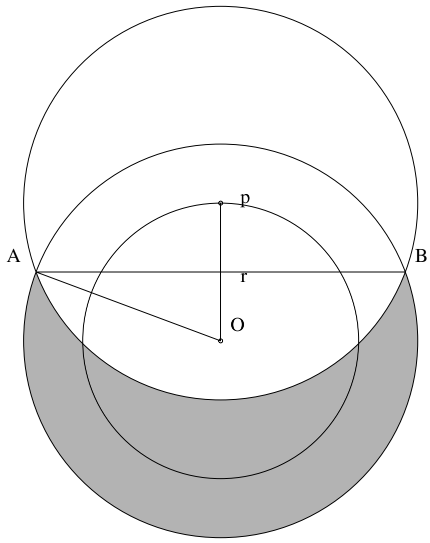
$$(\int\int_U 1 dx dy) = 2\pi \int_0^1 r dr = \pi$$
$$(\int\int_U x dx dy) = \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta \int_0^1 r^2 dr = 0$$
$$(\int\int_U x^2 + y^2 dx dy) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \pi\frac{1}{2}$$

(Notera att första integralen ger cirkelskivans area, den andra är noll av symmetriskäl).

Sätter vi in detta erhåller vi helt enkelt $\pi^2 = 2(\frac{\pi}{2}\pi)$.

Således blir medelvärdet av avstånden i kvadrat lika med ett.

8 *Sätt upp en integral som anger hur stor del av alla punktpar (p, q) där p, q tillhör enhetsskivan, har avståndet minst ett ifrån varandra.*



Låt p vara en punkt med avstånd r från centrum. Alla punkter q som befinner sig i den skuggande delen av enhetscirkeln befinner sig på avstånd åtminstonde ett från p. Låt A_r vara arean av detta område. Integralen blir då lika med

$$\int\int_{x^2+y^2\leq 1} A_r dx dy = 2\pi \int_0^1 r A_r dr$$

Det återstår bara att beräkna A_r. För en relevanta vinkeln $AOp = \alpha$ gäller

$$\sin\alpha = \sqrt{1-(r/2)^2}$$

Cirkelsektorn OAB får därmed arean $\alpha(= \frac{2\alpha}{2\pi}\pi)$ och därmed triangeln OAB arean $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$. Tar vi bort triangeln erhåller vi då $\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha$ detta skall fördubblas (varför?) och dras ifrån den totala arean. Till slut får vi

$$A_r = \pi - 2\alpha + \sin 2\alpha = \pi - 2\arcsin\sqrt{1-\frac{r^2}{4}} + 2(\sqrt{1-\frac{r^2}{4}})\frac{r}{2}$$

Den uppkomna integralen går faktiskt att räkna ut.

9 *Enligt Newtons tyngdlag så attraherar två punktmassor varandra med en kraft riktad längs dess förbindningslinje proportionell mot produkten av deras massor och inverst mot avståndet i kvadrat.*

a) Beräkna den totala kraften på en partikel innesluten i ett sfäriskt skal.

b) Beräkna den totala kraften på en partikel utanför ett sfäriskt skal.

c) ur b) slut den totala attraktionskraften av ett homogent klot med radien R och massan M (och gravitationskonstanten G). To compute the gravitational attraction of a shell in Euclidean space, we simply set up the integral

$$\int_0^\pi 2\pi \frac{\sin\theta}{(R^2+1-2R\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}(R-\cos\theta)d\theta$$

This is a mildly challenging integral. Setting $x = \cos\theta$ we reduce it to

$$2\pi\int_{-1}^1 \frac{R-x}{(R^2+1-2Rx)^{\frac{3}{2}}}dx$$

Now some straightforward manipulations yield

$$\begin{aligned}\frac{R-x}{(R^2+1-2Rx)^{\frac{3}{2}}}dx &= \frac{1}{2R}\frac{2R^2-2Rx}{(R^2+1-2Rx)^{\frac{3}{2}}}\\ &= \frac{1}{2R}\left(\frac{1}{(R^2+1-2Rx)^{\frac{1}{2}}} + \frac{R^2-1}{(R^2+1-2Rx)^{\frac{3}{2}}}\right)\end{aligned}$$

This allows us to write down a primitive function directly, namely

$$\frac{1}{2R^2}((R^2+1-2Rx)^{\frac{1}{2}} - \frac{R^2-1}{(R^2+1-2Rx)^{\frac{1}{2}}}$$

Plugging in the values ± 1 we end up with

$$\frac{\pi}{R^2}((R+1-\frac{R^2-1}{R+1}) - (R-1-\frac{R^2-1}{R-1})) = \frac{4\pi}{R^2}$$

Hence the gravitational attraction is the same, as if the mass had all been concentrated at the center. By considering a ball with rotational symmetry, we can think of it as layered by homogenous spheres, and conclude that it attracts, as if the mass would have been concentrated at the center as well.

10 *Ljusstyrkan hos en ljuskälla avtar med kvadraten på avståndet. Antag att universum är oändligt och att ljuskällorna är homogent placerade, d.v.s. antalet ljuskällor i ett sfäriskt skal är proportionellt mot skalets yta gånger dess tjocklek. Antag att alla ljuskällorna är av samma ljusstyrka. Beräkna den totala ljusstyrkan i en fix punkt.*

Ett exempel kan vara stjärnor av samma ljusstyrka (säg solens) belägna i heltalspunkter (x, y, z) med enheten säg ett ljusår.

Varje skal av stjärnor ger upphov till samma totala ljusstyrka, oberoende av skalets storlek. Ljusstyrkan för varje ljuskälla (stjärna) avtar med kvadraten på avståndet, men antalet stjärnor i ett skal växer samtidigt med kvadraten på avståndet. (Sfärens yta är proportionell mot radien i kvadrat). Summeras alla dessa får vi en oändlig summa, oberoende av stjärnornas avstånd och ljusstyrka. D.v.s effekten blir densamma om vi byter ut stjärnor mot eldflugor och låter dessa befinna sig på galaktiska avstånd från varandra. Detta kallas Olbers paradox och förutsätter ett oändligt universum som är homogent. Man kan skapa ett Olberskt universum genom att sätta en litet stearinljus i mitten av en kub med perfekt reflekterande sidor. Om ljusets hastighet vore oändligt så skulle ljusstyrkan bli oändlig och ur detta tankeexperiment sluter man ljusets ändliga hastighet.