Facit VIIa

MAN 230
6/3 2006

1 *Bestäm α, β så att vektorfältet givet av $(x + \alpha y + xy, 3x + \beta x^2 + y)$ är konservativt samt ange en potential. Använd denna för att beräkna integralen längs en kurva från punkten $(1,1)$ till punkten $(2,2)$*

Vi får villkoret

$$\alpha + x = 3 + 2\beta x$$

varav vi sluter att $\alpha = 3$ och $\beta = \frac{1}{2}$.

Integrera $x + \alpha y + xy$ med avseende på x och vi erhåller $U(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + 3xy + \frac{1}{2}x^2 y + C(y)$ där $C(y)$ är en konstant, d.v.s. oberoende av x. Betrakta nu $3x + \frac{1}{2}x^2 + y = \frac{\partial U}{\partial y} = 3x\frac{1}{2}x^2 + C'(y)$. Vi drar nu slutsatsen att $C'(y) = y$ d.v.s. $C(y) = \frac{1}{2}y^2$. En potential $U(x,y)$ är således given av

$$U(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + 3xy + \frac{1}{2}x^2 y + \frac{1}{2}y^2$$

Att beräkna kurvintegralen är då enkelt. Den är given av

$$U(2,2) - U(1,1) = (4 \times \frac{1}{2} + 12 + 8 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2}) - (\frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = 15.5$$

2 *a) Beräkna kurvintegralen*

$$\int_\gamma -y dx$$

där γ utgöres av linjesegmentet som förbinder punkterna (a,b) och (c,d)

b) använd a) och Greens formel för att ge en formel av arean för en triangel med hörn i punkterna $(a,b),(c,d)(e,f)$

c) Generalisera b) till att ge en formel för arean av en polygon given av hörnen $(a_1,b_1),(a_2,b_2)\ldots(a_n,b_n) = (a_1,b_1)$

d) Hur skall formeln modifieras om det rör sig om en polygon på sfären och hörnen ges av longituder och latituder?

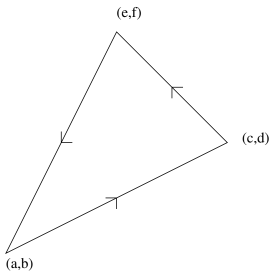
a) Parametrisera $\gamma(t) = (1-t)(a,b) + t(c,d) = (a + (c-a)t, b + (d-b)t)$. Kurvintegralen ges då av

$$\int_0^1 -(b+(d-b)t)(c-a)dt = -b(c-a)t - \frac{1}{2}(d-b)(c-a)t^2|_0^1 = -b(c-a)t - \frac{1}{2}(d-b)(c-a) = (c-a)(-b-\frac{1}{2}(c$$

b) Greens formel ger med $P(x,y) = -y$

$$\int_{\partial T} -y dx = \int\int_T -\frac{\partial P}{\partial y} = \int\int_T 1 = \text{Area}(T)$$

Där T är triangeln och ∂T är dess rand med positiv orientering.



Kurvintegralen blir då summan av de tre linjeintegralerna. Eftersom vi redan beräknat denna i det allmännaste fallet är det bara att substituera de relevanta hörnen. D.v.s. i formeln skall vi först sätta $(a,b),(c,d)$ sedan $(c,d),(e,f)$ d.v.s istället för a tar vi c istället för b tar vi d etc. M.a.o vi betraktar summan

$$\frac{1}{2}(a-c)(b+d)+\frac{1}{2}(c-e)(d+f)+\frac{1}{2}(e-a)(f+b)$$

c) För en allmänn polygon får vi således summan

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{2}(a_i-a_{i+1})(b_i+b_{i+1})$$

d) På sfären när punkterna ges av longituder $(-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2})$ och latituder $(-\pi\leq\psi\leq\pi)$ är vi istället intresserade av integralen $\int\int_P\cos\theta d\theta d\psi$ där P är polygonen. Det finns många vektorfält $P(\theta,\psi)d\theta+Q(\theta,\psi)d\psi$ som kan komma ifråga. $P=-\psi\cos\theta, Q=0$ är ett exempel $P=0, Q=\sin\theta$ är ett annat. Låt oss ta det senare. Vi erhåller då kurvintegralen

$$\int_0^1\cos(a+(c-a)t)(d-b)dt=\frac{d-b}{c-a}\sin(a+(c-a)t)|_0^1=\frac{\sin(c)-\sin(a)}{c-a}(d-b)$$

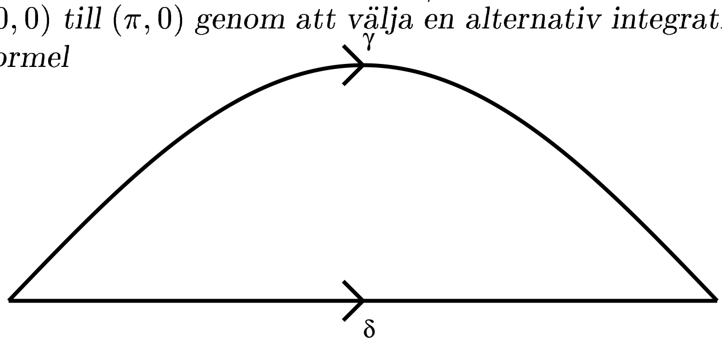
Formeln blir då istället

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\sin(a_{i+1})-\sin(a_i)}{a_{i+1}-a_i)}(b_{i+1}-b_i)$$

Vilket kan approximativt omskrivas såsom

$$\sum_{i=1}^{n-1}(\cos(a_{i+1})(b_{i+1}-b_i)$$

3 *Beräkna kurvintegralen* $\int_\gamma y^2dx+\cos(y)dy$ *längs sinuskurvan* $y=\sin(x)$ *från* $(0,0)$ *till* $(\pi,0)$ *genom att välja en alternativ integrationsväg samt utnyttja Greens formel*



Låt δ vara en alternativ integrationsväg från $(0,0)$ till $(\pi,0)$ given av linjesegmentet $(t,0)$ $(0\leq t\leq\pi)$.

Via Greens formel får vi att

$$\int_\gamma y^2dx + \cos(y)dy - \int_\delta y^2dx + \cos(y)dy = \int\int_D -2ydxdy$$

där D är området som begränsas av grafen $y = \sin(x)$ och x-axeln mellan de två punkterna $(0,0)$ och $(\pi, 0)$. Dubbelintegralen beräknas genom att först fixera x och integrera med avseende på y. D.v.s.

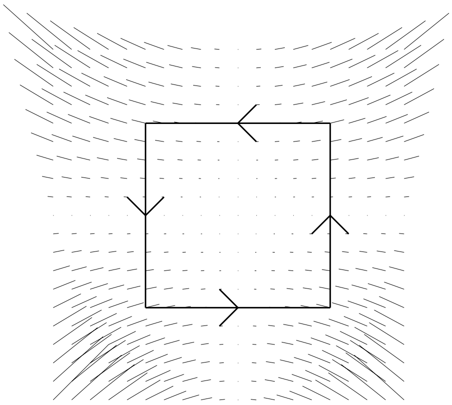
$$\int\int_D -2ydxdy = \int_0^\pi -y^2|_0^{\sin(x)}dx = \int_0^\pi -\sin^2(x)dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx = \frac{\pi}{2}$$

Att beräkna $\int_\delta y^2dx + \cos(y)dy$ är lätt. Denna är given av $\int_0^\pi 0dt = 0$
Således $\int_\gamma y^2dx + \cos(y)dy = \frac{\pi}{2}$

4 *Beräkna flödet genom enhetscirkeln av vektorfältet givet av* (x,y)
Den utåtriktade normalen till enhetscirkeln är given av (x,y). Dess skalär produkt med vektorfältet (x,y) är $x^2+y^2 = 1$. Vi skall således integrera den konstanta funktionen ett längs enhetscirkeln. Detta blir längden av densamma. Således 2π

5 *Beräkna flödet ut ur kvadraten med hörn i punkterna* $(\pm 1, \pm 1)$ *av vektorfältet* (xy, x^2y^2)

Vi har fyra kanter givna av $(t, -\frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, t), (-t, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, -t)$ där $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$ och med utåtriktade enhetsnormaler $(0,-1), (1,0), (0,1), (-1,0)$ respektive. Vi kommer således att betrakta följande fyra kurvintegraler.



$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} -x^2y^2dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} -\frac{1}{4}t^2dt = -\frac{1}{48}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} xydt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} -\frac{1}{2}tdt = 0$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2y^2dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} --\frac{1}{4}t^2dt = \frac{1}{48}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} -xydt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} --(-\frac{1}{2})tdt = 0$$

Det totala flödet blir således 0.

6 *Betrakta potentialen* $U = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *och dess gradient vektorfält*

$$(-\partial U/\partial x, -\partial U/\partial y)$$

Betrakta ellipsen

$$\frac{(x-\epsilon a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

där $a^2 - b^2 = \epsilon^2 a^2$ *längs vilken en planet rör sig. Om planetens hastighet i punkten* $(a(1+\epsilon), 0)$ *är* 1, *beräkna dess hastighet*

a) i punkten $(a\epsilon, b)$
b) i en godtycklig punkt på ellipsen
Potentialskillnaden mellan punkten $(a(1+\epsilon), 0)$ och punkten $(a\epsilon, b)$ är given av

$$-\frac{1}{\sqrt{a^2(1+\epsilon)^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2\epsilon^2+b^2}} = -\frac{1}{a(1+\epsilon)} + \frac{1}{a} = \frac{\epsilon}{a(1+\epsilon)}$$

Om hastigheten är v kommer således att gälla

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\epsilon}{a(1+\epsilon)} + \frac{1}{2}$$

d.v.s.

$$v = \sqrt{2\frac{\epsilon}{a(1+\epsilon)} + 1}$$

Om vi istället tar en godtycklig punkt $(a(\epsilon + \cos t), b\sin t)$ erhåller vi potentialskillnaden

$$-\frac{1}{\sqrt{a^2(1+\epsilon)^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2(\cos t+\epsilon)^2 + b^2\sin^2 t}} = -\frac{1}{a(1+\epsilon)} + \frac{1}{a\sqrt{1+2\epsilon\cos t}} =$$

$$= \frac{1+\epsilon-\sqrt{1+2\epsilon\cos t}}{a(1+\epsilon)\sqrt{1+2\epsilon\cos t}}$$

och således

$$v = \sqrt{\frac{1+\epsilon-\sqrt{1+2\epsilon\cos t}}{a(1+\epsilon)\sqrt{1+2\epsilon\cos t}} + 1}$$

Notera att om ϵ är litet kan detta approximeras med

$$v = \sqrt{\frac{\epsilon(1-\cos t)}{a(1+\epsilon)} + 1}$$