Lösningar till tentamenskrivning

MAN230

Flervariabelanalys

Lördag den 15 mars, 2008

8.30 - 13.30

1 [10] *Bestäm a, b, c så att vektorfältet*

$$(3x^2 + ay^2 + bxz, cxy, 3z^2 - 3x^2)$$

är konservativt samt har försvinnande divergens, och finn därefter en potential $U(x, y, z)$ och visa att den är harmonisk

Låt $P = 3x^2 + ay^2 + bxz, Q = cxy, R = 3z^2 - 3x^2$ Divergensen ges av $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 6x + bz + cx + 6z$ av detta sluter vi att $b = -6, c = -6$. Därefter beräknar vi $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 2ay + 6y$ och sluter att $a = -3$. Vi integrerar sedan P med avseende på x och erhåller $U(x, y, z) = x^3 - 3xy^2 - 3x^2z + f(y, z)$ Derivera med avseende på y och vi erhåller $\frac{\partial f(y,z)}{\partial y} = 0$ d.v.s $f(y, z) = f(z)$ beroende på endast z. Slutligen derivering med avseende på z ger $-3x^2 + f'(z)$ således $f'(z) = 3z^2$ d.v.s. $f(z) = z^3$.

Potentialen är således given av $x^3 - 3xy^2 - 3x^2z + z^3$, och eftersom divergensen av gradienten är Laplace operatorn är funktionen harmonisk.

2 [10] *Funktionen $F(x, y) = 2x^3 - 3x^2y - 6xy^2 + y^3 + 6x + 12y$ har en kritisk punkt i $(1, 1)$ Avgör huruvida vi har ett lokalt maximum, minimum eller sadelpunkt.*

Vi behöver finna andra derivatorna i punkten $(1, 1)$

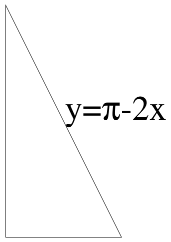
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 12x - 6y - y^2 = 5$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 6x - 12y = -6$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -12x + 6y = -6$$

Vi skall således undersöka den kvadratiska formen $5x^2 - 2 \times 6xy - 6y^2$. Man inser omedelbart att den anta både positiva och negativa värden, således en sadelpunkt.

3 [10] *Beräkna dubbelintegralen*

$$\iint_{\triangle} \sin(x+2y)dxdy$$

över triangeln med hörn i punkternas $(0,0),(\pi/2,0)$ *och* $(0,\pi)$



Genom att fixera x erhåller vi iterationen

$$\int_0^{\pi/2} (\int_0^{\pi-2x} \sin(x+2y)dy)dx$$

Genom att finna den lämpliga primitiven beräknar vi den inre integalen

$$\int_0^{2x} \sin(x+2y)dy = -\frac{1}{2}\cos(x+2y)|_0^{\pi-2x} = -\frac{1}{2}(\cos(2\pi-3x)-\cos(x))$$

Slutligen ger

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} -\cos(2\pi-3x)+\cos(x)dx = \frac{1}{2}(-\frac{1}{3}\sin(3x)+\sin(x)|_0^{\pi/2}) = \frac{1}{6}+\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

4 [10] *Beräkna kurvintegralen*

$$\int_\gamma \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$$

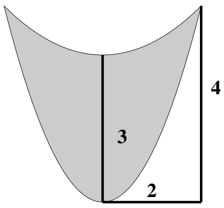
där γ *är spiralen given i polära ko-ordinater av* $r=\theta$, *där* θ *går från* π *till* 5π

Vi har $x=\theta\cos\theta$ och $y=\theta\sin\theta$ därmed $dx/d\theta = -\theta\sin\theta+\cos\theta = -y+\cos\theta$ och $dy/d\theta = \theta\cos\theta+\sin\theta = x+\sin\theta$ och därmed erhåller vi

$$\int_\gamma \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} = \int_\pi^{5\pi} \frac{y^2-y\cos\theta+x^2+x\sin\theta}{x^2+y^2}d\theta = \int_\pi^{5\pi} 1d\theta = 4\pi$$

ty $-y\cos\theta+x\sin\theta = \theta(-\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta) = 0$

5 [10]



En glasskål är formad genom rotation (via dess symmetriaxel) av figuren till vänster, vilken är utskuren av två parabelbågar och med angivna mått. Beräkna
a) dess volym
b) tyngdpunkt.

Man inser lätt att de bägge parabelbågarna är givna av $y = x^2$ och $y = \frac{1}{4}x^2$ respektive (eller snarare $\frac{1}{2}x^2 + 3$ för att vara exakt). Volymen beräknas enklast genom att man skriver den som skillnaden mellan två parabolider P_1, P_2. Genom substitionen $z \to z/4$ övergår den större paraboliden P_2 i den mindre P_1, och således har den volymen en fjärdedel av den större. (Allmänt finner man genom variabelbytet $z' = \frac{1}{4}z$ att

$$\iiint_{P_2} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{P_1} f(x,y,4z')dxdydz'$$

) Volymen för den större ges av integralen

$$\iiint_{P_2} dxdydz = \int_0^4 \pi z dz$$

(genom att fixera z och notera att arean av snittcirkeln är πz ty $x^2 = z$. Vi erhåller 8π, och skålens volym (den skuggade delen) blir $3/4 \times 8\pi = 6\pi$. För att beräkna z-momentet (de andra är noll) kan vi beskriva den som skillnaden mellan $I_2 = \iiint_{P_2} zdxdydz$ och $I_1 = \iiint_{P_1}(z+3)dxdydz$. Skriv $I_0 = \iiint_{P_1}(z)dxdydz$ och vi får $I_1 = 3Vol(P_1) + I_0$. genom variabelbytet $z' = z/4$ ovan erhåller vi $I_2 = 16I_0$ (genom $F(x,y,z) = z$ ovan). Vi får $\iiint_{P_2} zdxdydz = \int_0^4 \pi z^2 dz = 64\pi/3$. Vi får därmed $I_0 = 4\pi/3$ och $3Vol(P_1) = 6\pi$. Momentum ges då av $64\pi/3 - 22\pi/3 = 14\pi$ och därmed tyngpunkten i $(0,0,7/3)$

6 [10] *En yta H parametriseras av $(\tan(s)\cos(t), \tan(s)\sin(t), t)$, för rektangeln $-\frac{\pi}{4} \le s \le \frac{\pi}{4}, 0 \le t \le \pi$.*
a) Sätt upp en dubbelintegral för att beräkna arean av ytan H och om möjligt beräkna denna
b) Låt C vara kurvan $t = 2s + \frac{\pi}{2}$ i parameterrektangeln. Finn dess tangent i punkten $(0,0,\pi)$ Kom ihåg att $\frac{d\tan t}{dt} = 1 + \tan^2 t$

Vi finner r_s och r_t given av de två raderna

$$\begin{array}{ccc} (1+\tan^2 s)\cos t & (1+\tan^2 s)\sin t & 0 \\ (\tan s)(-\sin t) & (\tan s)\cos t & 1 \end{array}$$

Därmed ges $r_s \times r_t = ((1+\tan^2 s)\sin t, -(1+\tan^2 s)\cos t, (1+\tan^2 s)\tan s)$, och vi skall beräkna $\iint(1+\tan^2 s)\sqrt{1+\tan^2 s}dsdt = \iint \frac{1}{\cos^3 s}dsdt = \pi\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{1}{\cos^3 s}ds$ enkelintegralen behandlas med variabelbytet $x = \sin s$ vilket ger integralen

$$\pi/\sqrt{2}\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{(1-x^2)^2}dx$$

en partialbråksuppdelning av integranden ger

$$\pi/\sqrt{2}\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}\right)dx$$

vilket lätt integreras till

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-x}-\ln(1-x)+ln(1+x)-\frac{1}{1+x}\Big|_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}-\ln(1-\frac{1}{\sqrt{2}})+\ln(1+\frac{1}{\sqrt{2}})-\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$$
$$=\sqrt{2}+\ln(3+2\sqrt{2}) \quad \blacksquare$$

Resultatet blir således $\pi(1+\ln(3+2\sqrt{2})/\sqrt{2})$

Kurvan C ges av kompositionen av avbildningarna $s \mapsto (s, 2s+\frac{\pi}{2})$ och parametriseringen ovan av ytan. Dessa ger upphov till matriserna

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

och

$$\begin{pmatrix} (1+\tan^2(s))\cos(t) & -\tan(s)\sin(t) \\ (1+\tan^2(s))\sin(t) & \tan(s)\cos(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$s=0$ ger upphov till $(0,\frac{\pi}{2})$ i parameterplanet och $(0,0,\pi/2)$ i rummet. Vi sätter in värdet $s=0, t=\pi/2$ i den större matrisen och erhåller

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och multiplicerar matriserna vilket ger riktningsvektorn $(0,1,2)$.

7 [15] Låt $F=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ med $a^2<b^2<c^2$ och betrakta dess gradientfält $\nabla F=(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z})$

a) Finn maximum och minimum av längden av $\|\nabla F\|$ på ellipsoiden E given av nivåytan $F(x,y,z)=1$

b) Beräkna ytintegralen $\iint_E \nabla F \cdot N$

c) Ur a) och b) härled en övre och undre begränsning av arean av E.

Vi betraktar $\|\nabla F\|^2=\frac{4x^2}{a^4}+\frac{4y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}$ Vi fill finna punkter så att dess gradient är parallell med nivåytans gradient, d.v.s.

$$\frac{x}{a^4}=\lambda\frac{x}{a^2}$$
$$\frac{y}{b^4}=\lambda\frac{y}{b^2}$$
$$\frac{z}{c^4}=\lambda\frac{x}{c^2}$$

Kritiska punkter på nivåytan ges av $(\pm a,0,0),(0,\pm b,0),(0,0,\pm c)$ vilket ger max och minivärdena $\frac{2}{a}$ och $\frac{2}{c}$ respektive. (Vi antar $a,b,c>0$)

För att beräkna ytintegralen använder vi Gauss sats. Vi beräknar divergensen av ∇F till $\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}+\frac{2}{c^2}$. För att beräkna integralen av denna över ellipsoiden kan vi höra variabelbytet $x' = x/a, y' = y/b, z' = z/c$ varvid vi finner $dxdydz = abcdx'dy'dz'$ och vi bektraktar integralen

$$2abc \iiint_S \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} dx'dy'dz' = \frac{4\pi}{3} 2abc(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})$$

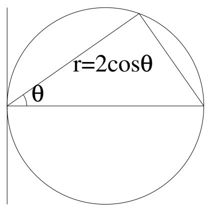
över enhetssfären.

Om arean av ellipsoiden är A finner vi att ytintegralen begränsas av $A\frac{2}{a}$ och $A\frac{2}{c}$ ovanifrån och nedanifrån respektive. Detta ger

$$\frac{4\pi}{3}ab(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}) \leq A \leq \frac{4\pi}{3}bc(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})$$

8 [20] Givet en fix punkt P på periferin av en cirkel med radien 1. Beräkna medelavståndet mellan P och en punkt i cirkelskivan.

För att finna medelvärdet skall vi beräkna $\frac{1}{\pi}\int_D rdxdy$ där D är en cirkelskiva av radie 1 (och π dess area) och r är avståndet till en fix punkt på dess rand. Det blir då naturligt att använda polära ko-ordinater.



En cirkel med radien 1 tangent till y-axeln i origo ges i polära ko-ordinater av $r = 2\cos\theta$ Vi transformerar således $\int_D rdxdy$ till $\int_E r^2 drd\theta$ där E är området givet av $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ och $0 \leq r \leq 2\cos\theta$. Fixerar vi θ först erhåller vi de itererade integralerna

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\int_0^{2\cos\theta} r^2 dr)d\theta$$

vilket reduceras till

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{3}r^3|_0^{2\cos\theta} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{3}(2\cos\theta)^3 d\theta$$

Genom att göra variabelbytet $t = \sin\theta$ transformerar vi integralen till

$$\frac{8}{3}\int_{-1}^{1}(1-t^2)dt = 2\frac{8}{3}(1-\frac{1}{3}) = \frac{32}{9}$$

och därmed beräknar vi medelavståndet $\frac{32}{9\pi}$

9 [20] Betrakta avbildningen från kvadraten $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ in i $\mathbb{R}^4$ givet av $(\theta, \psi) \mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta), \cos(\psi), \sin(\psi))$ a) För varje θ, ψ skriv upp matrisen M för den linjära approximationen i denna punkt.

b) Visa att om v, w är två godtyckliga vektorer i $\mathbb{R}^2$ gäller att skalärprodukterna $< v \,.\, w >$ och $< Mv \,.\, Mw >$ är lika (den senare produkten tagen i $\mathbb{R}^4$).

c) Visa att bilden av kvadraten är en torus i $\mathbb{R}^4$ d.v.s. att den kan beskrivas som produkten av två cirklar.

d) Beräkna torusens area.

a) Vi erhåller matrisen

$$M = \begin{pmatrix} -\sin\theta & 0 \\ \cos\theta & 0 \\ 0 & -\sin\psi \\ 0 & \cos\psi \end{pmatrix}$$

b) Om $v = (x_1, y_1), w = (x_2, y_2)$ erhåller vi

$$Mv = (-\sin\theta x_1, \cos\theta x_1, -\sin\psi y_1, \cos\psi y_1)$$
$$Mw = (-\sin\theta x_2, \cos\theta x_2, -\sin\psi y_2, \cos\psi y_2)$$

varav följer att

$$< Mv, Mw >= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)x_1x_2 + (\sin^2\theta + \cos^2\theta)y_1y_2 = x1x_2 + y_1y_2 =< v, w >$$

c) $x = (\cos\theta, \sin\theta)$ liksom $y = (\cos\psi, \sin\psi)$ utgör punkter på cirklar av radien 1(akalla dem S_1, S_2. En godtycklig punkt $(\cos\theta, \sin\theta, \cos\psi, \sin\psi)$ är således av typen $(x, y) \in S_1 \times S_2$

d) Arean av en parallellogram spänt av två vektorer v, w ges av $|v||w|\sin\theta$ där θ är vinkeln mellan dem. Vi vet att $\cos\theta =< v, w > /(|v||w|)$ således har vi $\sin\theta = \sqrt{1- < v, w >^2 /(|v|^2|w|^2)}$ och därmed får vi arean $\sqrt{|v|^2|w|^2 - < v, w >^2}$. Om nu avbildningen bevarar skalärprodukten ser vi att arean av varje parallellogram ändras inte under densamma. Således är avbildningen area bevarande. D.v.s. arean av torusen är lika med arean av parameterkvadraten, vars sida är 2π. Arean av torusen blir således $4\pi^2$.

Ulf Persson
25/3 2008

G $\geq$ 29 VG $\geq$ 70