Lösningar till tentamensskrivning

MAN230

Flervariabelanalys

Lördag den 17 mars, 2007

8.30 - 13.30

1 [10] *Bestäm a, b, c så att vektorfältet*

$$(3x^2 + axy + z^2, 2x^2 + 3y^2 + bz, 2z + y + cxz)$$

är konservativt och finn därefter en potential $U(x, y, z)$

Givet vektorfältet (P, Q, R) erhåller vi de tre villkoren

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Ur detta inser vi lätt att $a = 4, b = 1, c + 2$. Integrerar vi sedan det första uttrycket m.a.p. x får vi $x^3 + 2x^2y + xz^2 + \psi(y, z)$. Integrerar vi det andra m.a.p. y f*r vi istället $2x^2y + y^3 + yz + \theta(x, z)$. Sammanfattar vi de två kan vi skriva $x^3 + y^3 + 2x^2y + yz + xz^2 + \alpha(z)$. Slutligen integration m.a.p. z ger $\alpha(z) = z^2 + C$ där C är en godtycklig konstant.

En potential U ges av

$$U(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^2 + 2x^2y + yz + xz^2$$

2 [10] *En vas har formen av en rotation av kurvan $y = x^4$ runt y-axeln. Om vätska med volymen 1 fylles i vasen, till vilken höjd når den?*

Snittar vi y-axeln vinkelrätt vid y erhåller vi en cirkel med radie $y^{1/4}$ eftersom $y = x^4$. Dess area ges därmed av $\pi\sqrt{y}$. Den totala volymen upp till höjd h ges då av integralen

$$\int_0^h \pi\sqrt{d}y = \pi\frac{2}{3}y^{2/3}|_0^h = \frac{2\pi}{3}h^{\frac{2}{3}}$$

Om den totala volymen är 1 fås

$$h = (\frac{3}{2\pi})^{\frac{2}{3}} = (\frac{9}{4\pi^2})^{\frac{1}{3}}$$

3 [10] *Beräkna integralen*

$$\iint_D (x^2 - y^2)dxdy$$

där D är området givet av $|x| + |y| \leq 1$

Om vi gör variabelbytet $u = x + y, v = x - y$ ges D av $-1 \leq u, v \leq 1$. Vidare ges funktionaldeterminanten av

$$\frac{dudv}{dxdy} = \left| \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{matrix} \right| = 2$$

Slutligen transformeras $x^2 - y^2$ till uv.

Vi har således reducerat till integralen

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} 2uvdudv = 2(\int_{-1}^{1} udu)(\int_{-1}^{1} vdv) = 2 \times 0 \times 0 = 0$$

Alternativt kan vi dela upp integralen i de två integralerna

$$\int_{-1}^{0} (\int_{-1-x}^{1+x} (x^2 - y^2)dy)dx + \int_{0}^{1} (\int_{-1+x}^{1-x} (x^2 - y^2)dy)dx$$

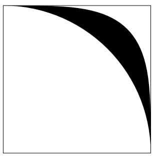
Detta leder till

$$\int_{-1}^{0} (x^2y - \frac{1}{3}y^3|_{-1-x}^{1+x})dx + \int_{0}^{1} (x^2y - \frac{1}{3}y^3|_{-1+x}^{1-x})dx =$$
$$\int_{-1}^{0} (2x^2(1+x) - \frac{2}{3}(1+x)^3)dx + \int_{0}^{1} (2x^2(1-x) - \frac{2}{3}(1-x)^3dx$$

och det är lätt att inse att var och en av dessa integraler är lika med noll $(-frac16+ \frac{2}{3} - \frac{1}{2})$.

Slutligen under spegling i linjen $x = y$ inser vi att $(x^2 - y^2) = -(y^2 - x^2)$ så integralen är noll av symmteriskäl.

4 [10]



Givet integralen $\iint_D xydxdy$ där D utgör området $x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq x^4 + y^4 \leq 1$ omvandla den via variabelbytet $u = x^2, v = y^2$ och beräkna den därefter.

Området D ges av $x^4 + y^4 \leq 1$ och $x^2 + y^2 \geq 1$ samt $x, y \geq 0$. Detta framgår inte tydligt av beskrivningen som är självmotsägande. (Om $0 \leq x < 1$ gäller $x^4 < x^2$.)

I u, v planet ges detta av D' givet av $u, v \geq 0, u + v \geq 1, u^2 + v^2 \leq 1$

Jacobianen ges av

$$\frac{dudv}{dxdy} = \left| \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{matrix} \right| = 4xy$$

Integralen transformeras därmed till

$$\iint_{D'} \frac{1}{4} dudv = \frac{1}{4}\int_0^1 (\int_{1-u}^{\sqrt{1-u^2}} dv)du$$

Integralen utgöres helt enkelt av ytan av kvarts cirkeln minus triangelns gånger en fjärdedel, d.v.s. $\frac{1}{4}(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2})$

5 [10] *En helix H är given av* $(\cos(t), \sin(t), t)$, *denna translateras i z-riktingen med π och ger upphov till en ny helix H_π. Finn det minsta avståndet mellan två punkter p, q där p är en punkt på H och q är en punkt på H_π* Den andra helixen H_π parametriseras av $(\cos(s), \sin(s), s+\pi)$, avståndet i kvadrat $D(s,t)$ mellan två punkter givna av $p = H(t)$ och $q = H_\pi(s)$ ges av

$$\begin{aligned} &((\cos(t) - \cos(t))^2 + (\sin(t) - \sin(t))^2 + (s - t + \pi)^2 \\ = {}& 2 - 2\cos(t)\cos(s) - 2\sin(s)\sin(t) + (s-t)^2 + 2\pi(s-t) + \pi^2 \end{aligned}$$

Vilket kan förenklas till

$$2 - 2\cos(s-t) + (s-t)^2 + 2\pi(s-t) + \pi^2$$

För att finna de kritiska punkterna beräknar vi gradienten och vi finner därvid

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial s} &= -2\sin(s-t) + 2(s-t) + 2\pi \\ \frac{\partial D}{\partial t} &= 2\sin(s-t) - 2(s-t) - 2\pi \end{aligned}$$

Kritiska värden ges för s, t sådan att

$$\sin(s-t) = (s-t) + \pi$$

speciellt ser vi att den väsentliga är differensen $s - t = \alpha$ detta ger ekvationen

$$\sin\alpha = \alpha + \pi$$

Sätt $\beta = \alpha + \pi$ och vi transformerar till

$$\beta = \sin(\beta - \pi) - \sin\beta$$

Denna har som enda lösning $\beta = 0$ d.v.s $s - t = -\pi$. Vi finner att $\cos(s-t) = \cos(-\pi) = -1$ och $(s - t + \pi)^2 = 0$ vilket ger $D = 2 + 2 = 4$ och således avståndet är $\sqrt{D} = 2$

(Givet en punkt på ena helixen finner vi den närmaste punkten på den andra antipodt och på samma höjd. Dt är precis så som basparen förenar i den dubbla spiralen som utgör DNA's struktur.)

6 [10] *Beräkna kurvintegralen*

$$\int_\gamma -ydx + xdy$$

där γ är en parabelbåge given av $y = x^2$ som sammanlänkar punkten p=$(1,1)$ med punkten $(2,4)$.

γ paranmetriseras av (t, t^2) således transformeras kurvintegralen till

$$\int_1^2 ((-t^2)1 + (t)(2t))dt = \int_1^2 t^2 dt = \frac{1}{3}t^3|_1^2 = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}$$

7 [10] *Ett flöde ges av gradienten till funktionen* $\sin(|r|)$ *där* $|r| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$*. Beräkna det totala flödet ut ur sfären med radien π.*

Gradienten till funktionen $|r|$ gives av $\frac{r}{|r|}$, (där $r = (x,y,z)$) och därmed ges gradienten av $\sin(|r|)$ av fältet $\frac{\cos(|r|)r}{|r|}$. På sfären givet av $|r| = \pi$ erhåller vi då $-\frac{1}{\pi}r$. Denna gradient pekar hela tiden vinkelrätt in i sfären och med beloppet 1. Det totala flödet blir därmed den negativa sfärens area d.v.s. $-4\pi|r|^2 = -4\pi^3$

8 [15] *De normaler till nivåytan $x^3+y^3+z^3 = 1$ som skär z-axeln ligger alla i ett plan. Finn ekvationen för detta plan!*

Visa även att det endast finns en normal som går genom origo. Finn denna normal, och bestäm den punkt på nivå-ytan den korresponderar emot. Vad är speciellt med denna punkt?

Normalerna ges av gradienten $(3x^2, 3y^2, 3z^2)$ med riktning (x^2, y^2, z^2) d.v.s. linjerna $(x + x^2t, y + y^2t, z + z^2t)$. En sådan skär z-axeln omm vi kan finna t så att

$$x + x^2 t = 0$$
$$y + y^2 t = 0$$

d.v.s. $t = -\frac{1}{x} = -\frac{1}{y}$ vilket betyder att $x = y$ vilket implicerar att $x+x^2t = y+y^2t$ för alla t, vilket betyder att normalerna alla ligger i planet $x = y$.

Om normalen går genom origo erhåller vi även $t = -\frac{1}{z}$ d.v.s. $x = y = z$, detta motsvarar punkten (a,a,a) sådant att $3a^3 = 1$.

Denna punkt är även den punkt på nivåytan som ligger närmast origo. *Notera att fallen $x = 0$ och $y = 0$ bör behandlas separat givandes tv* nya fall*

9 [15] *Betrakta funktionen $z = (x+y)e^{-2(x^4+y^4)}$*

a) Finn dess maximala och minimala värden.

b) Finn dess maximala och minimala värden under bivillkoret $x^4 + y^4 = 1$

c) Skissa funktionens nivåkurvor, samt finn minsta avståndet mellan två punkter där den ena tillhör nivåkurvan korresponderande till värdet $2e^{-4}$ och den andra tillhör nivåkurvan korresponderande till $-4e^{-64}$. De kritiska punkterna ges av $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Detta är ekvivalent med att

$$(x+y)(-8x^3) + 1 = 0$$
$$(x+y)(-8y^3) + 1 = 0$$

Ur detta inses lätt att $-8x^3 = -8y^3$ d.v.s. $x = y$ vilket leder till villkoret $16x^4 = 1$ d.v.s $x = \pm\frac{1}{2}$. Punkten $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ger värdet $e^{-\frac{1}{4}}$ medan $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ger $-e^{-\frac{1}{4}}$. Eftersom funktionen går mot noll för stora värden är dessa abosluta maxima och minima.

Gradienten till nivå-kurvan $x^4+y^4=1$ gives av $(4x^3,4y^3)$ som skall vara parallell med $(((x+y)(-8x^3)+1)e^{-2(x^4+y^4)},((x+y)(-8y^3)+1)e^{-2(x^4+y^4)})$ detta leder till villkoret

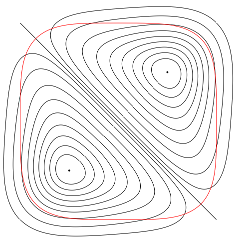
$$((x+y)(-8x^3)+1)y^3=((x+y)(-8y^3)+1)x^3$$

d.v.s.

$$((x+y)(-8(xy)^3)+y^3=((x+y)(-8(xy)^3)+x^3$$

varav vi sluter att $x=y$. Eftersom de ligger på nivåkurvan erhåller vi att $x=\pm\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}$, de maximla och minimala värdena blir då $\pm\frac{2}{2^{\frac{1}{4}}}e^{-2}$

Nivåkurvorna är begränsade ovaler runt de kritiska punkterna, utom linjen $x+y=0$ som motsvarar nivåkurvan till värdet 0.



För att finna två punkter på två olika nivåkurivor med minimalt avstånd mellan varandra, måste vi finna en linje som är vinkelrät mot bägge. Det är lätt att inse att linjen $x=y$ har denna egenskap, ty längs den linjen har alla gradienter samma riktning. Det är då lätt att inse att vi väljer punkterna $(1,1)$ och $(-2,-2)$ respektive. Dess avstånd sinsemellan är $3\sqrt{2}$

Ulf Persson
25/3 2007

40 poäng ger garanterat godkänt
80 poäng ger garanterat väl godkänt