Inlämningsuppgifter

Linjär och Multilinjär Algebra

17/10 2002

inlämnas 22/10 2002

Uppgifter försedda med asterisk är främst ämnade för doktorander

1 Låt A vara en 2-dimensionell matris. Ge en formel för $\det(A)$ i termer av $\mathrm{Tr}(A)$ och $\mathrm{Tr}(A^2)$. Lös motsvarande uppgift för 3-dimensionella matriser, genom att även införa $\mathrm{Tr}(A^3)$.

2 Varje representation av den symmetriska gruppen S_5 inducerar en representation av den normala delgruppen A_5. Om g är en udda permutation inducerar g en automorfism av A_5 via konjugering. Vilka irreducibla representationer av A_5 är invarianta under dessa. Med hjälp av detta, eller på annat sätt, försök beräkna karaktärstabellen för S_5 med utgångspunkt från karaktärstabellen för Ikosahedergruppen.

3 Avgör vilka av nedstående påstående som är sanna.

a) Varje irreducibel representation av en abelsk grupp över de reella talen är antingen 1-dimensionell eller 2-dimensionell.

b) Man kan finna representationer av cykliska grupper över de rationella talen med godtyckligt hög dimension.

c) Om χ är en karaktär för en representation W så gäller $|\chi(g)| \leq \dim W$

d) En karaktär kan antaga värdet $1/2$

e) Om χ är en irreducibel karaktär så gäller att $|\sum_{g\in G} \chi(g^2)| \leq |G|$ med strikt olikhet omm χ inte är reellvärd.

f) $\mathbb{Z}_5$ kan inbäddas i $Gl(4, \mathbb{Q})$

4 Låt $P(x) \in K[x]$ vara av grad n. Visa att man kan finna en avbildning $A \in \mathrm{Hom}(V, V)$ för något n-dimensionellt rum V, sådan att den karaktäristiska ekvationen för A är P.

5 Beskriv delgruppen av $SU(2)$ med koefficienter i de Gaussiska heltalen $\mathbb{Z}[i]$ (d.v.s. alla tal av formen $a + bi$ med $a, b \in \mathbb{Z}$).

6 Ikosahedergruppen kan inbäddas i $SO(3)$. Givet den dubbla övertäckningen $SU(2, \mathbb{C}) \to SO(3, \mathbb{R})$ erhåller man den bi-ikosahedergruppen med 120 element. Visa att denna har en komplex 2-dimensionell representation. Är denna representation realiserbar över $\mathbb{R}$

7 * Betrakta talen $\frac{a+b\sqrt{-3}}{2}$ med $a \equiv b(2)$. Visa att denna utgör en ring R (ringen av heltalselement i $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$), med sex enhetselement (d.v.s. invertibla element). Beskriv delgruppen av $U(2)$ bestående av matriser med koefficienter i R. Speciellt hur många element har den. Har den några normala delgrupper?