Tentamensskrivning

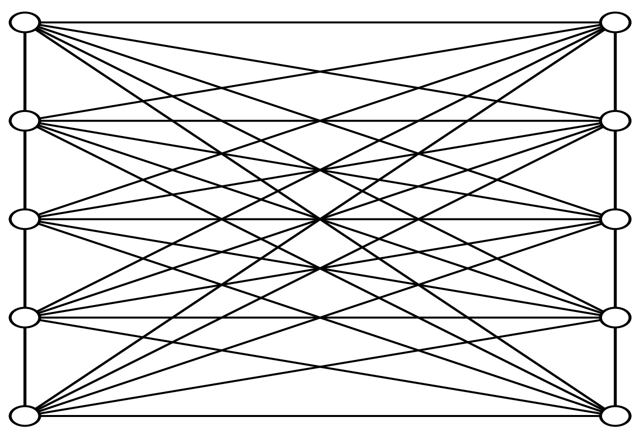
MAN240

Diskret Matematik

Lördag den 4 juni

8.30 - 13.30

1 [10] Följande graf återfinnes i William James *Principles of Psychology Vol I* från 1890 för att illustrera associativa kopplingar i hjärnan.



a) Visa att grafen inte är bipartit

b) Kantfärga och nodfärga grafen respektive med ett minimalt antal färger.

c) Om de vertikala kanterna ges vikten två och de transversella vikten ett, finn ett '*spanning tree*' av minimal vikt.

d) Finn, om möjligt, en Hamiltoncykel och en Eulercykel.

2 [5] Beräkna antalet sekvenser av vilka $IXCIMM$ är ett typiskt exempel. Nämligen sekvenser baserade på de fyra symbolerna I, X, C, M och varje symbol får endast användas högst nio gånger, och ordningen spelar ingen roll. Notera att speciellt den tomma sekvensen också är inbegripen.

3 [5] Beräkna antalet fem-siffriga tal vars alla siffror är distinkta. (4 är inte ett femsiffrigt tal, däremot 40000)

4 [5] Låt ett träd endast ha noder av grad $1, 2, 3$. Låt t beteckna antalet trippelnoder (grad tre) och l antalet löv (grad ett). Beräkna $l - t$.

5 [10] Låt X vara en mängd med n element. Beräkna antalet partioner av X i tre disjunkta icke tomma delmängder.

6 [10] Låt $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vara en matris med element i kroppen $\mathbb{Z}_2$. Den definerar på sedvanligt sätt en linjär avbildning från vektorrummet $\mathbb{Z}_2^2$ till sig självt, via

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

Matrisen säges vara icke-singuljär om den avbildar element skilda från noll ($= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$) till element skilda från noll.

a) Beräkna antalet matriser, samt antalet icke-singuljära matriser.

b) De icke-singuljära matriserna definerar en permuation av elementen skilda från noll. Skriv ner de två matriserna som motsvaras av de cykliska permutationerna av ordning tre.

7 [15] Låt F_n vara Fibonaccitalen definierade rekursivt av $F_0 = F_1 = 1$ och $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

a) Visa att $(F_{n+1}, F_n) = 1$ d.v.s. två påföljande tal i serien är relativt prima

b) Finn tal a, b sådan att $aF_{n+1} - bF_n = 1$

c) Visa att Fibonaccitalen utgör en periodisk sekvens modulo ett givet heltal N och ge en övre uppskattning av periodens längd i termer av N.

d) Beräkna sista siffran i F_{1001} samt ge en uppskattning av antalet siffor i talet.

e) Visa att varje siffra kan uppkomma som sista siffra i ett Fibonaccital.

8 [5] Använd den genererande funktionen $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ för att beräkna summan $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$

Ulf Persson

31/5 2005

Skrivningsvakt: Iulia Pop
tel: 076 2721861

35 poäng eller mer ger garanterat godkänt på kursen
15 poäng eller mindre ger garanterat underkánt på kursen.