Uppgifter för Räkneövning Torsdag 21/4

1 Finn inversen till 7 i $\mathbb{Z}_{13}$

2 Lös ekvationen $x^2 + 3x + 4 = 0$ i $\mathbb{Z}_{11}$

3 Beräkna Euler funktionen $\phi(360)$

4 Beräkna antalet divisorer till talet 510510

5 Finn x så att $29|x^2 + 1$

6 Visa att om $p|x^4 + 1$ så gäller att $p = 2$ eller $p = 1(8)$ använd detta för att faktorisera $7^4 + 1 = 2452$

7 Talet $1729 = 10^3 + 7^3 = 12^3 + 1^3$ använd detta för att faktorisera talet.

8 Finn alla tal under 100 med precis åtta divisorer

9 Följande metod att finna stora faktorer till ett tal X lär ha uppfunnits av Fermat. Låt d^2 vara den minsta kvadrat sådan att $d^2 \geq X$, betrakta sekvensen av kvadrater $d^2, (d+1)^2, (d+2)^2, \ldots$ samt skillanderna $d^2 - X, (d+1)^2 - X, (d+2)^2 - X, (d+3)^2 - X \ldots$. Om någon av dessa är en kvadrat. BINGFO! Varför? Förklara metoden. Utnyttja den för att finna en faktorisering av 11021

10 Talen $F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5, F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17, F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257, F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537$ är alla primtal. Fermat visade att $F_5 = 2^{2^5} + 1$ inte är ett primtal. Visa att varje primtalsfaktor p måste satisfiera $p \equiv 1(64)$ och visa att $p = 641$ i själva verket är en faktor. (Med undantag av F_1 slutar varje F_n med en sjua?)

11 Betrakta $\mathbb{Z}_p$ för ett primtal p. Visa att om $a \not\equiv 0(p)$ så utgör $x \mapsto ax + b$ en permutation av elementen i $\mathbb{Z}_p$. Om $p = 7, a = 2, b = 1$ finn cykelstrukturen av denna permutation.

12 Om $a \not\equiv 0(p)$ så utgör avbildningen $x \mapsto ax$ en permutation av de $p - 1$ elementen i $\mathbb{Z}_p^*$. Visa att denna permutation har inga fixpunkter om $a \not\equiv 1(p)$ och att allmänt att cyklerna i permutationen är alla av samma längd. I fallet $p = 13, a = 7$ vad är längden?

13 Visa att varje permutation av $\mathbb{Z}_3$ kan skrivas på formen $x \mapsto ax+b$. Speciellt vad är villkoret på a, b för att permutationen skall vara en involution (ordning två).

14 Om N är ett heltal men inte en kvadrat visa att $\sqrt{N}$ inte kan vara rationellt. (D.v.s. man kan inte finna heltal p, q sådana att $p^2 - Nq^2 = 0$).

15 Om $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_n = 0$ med a_i heltal. Visa att varje rationell lösning är en heltals lösning, där lösningarna dessutom är faktorer i a_n. Utnyttja detta för att visa att ingen av rötterna till ekvationen $x^3 - 3x + 1 = 0$ är rationell.