Zeitschrift für experimentelle und angewandte Psychologie
1976, Band XXIII, Heft 2, S. 320—338

Institut für Medizinische Statistik und Dokumentation der Universität Mainz

Die Methode der Konvarianzselektion als Alternative zur Faktorenanalyse, dargestellt an Persönlichkeitsmerkmalen

Nanny Wermuth, Volker Hodapp und Geerd Weyer

Der Ansatz der Kovarianzselektion wird in ihren Grundzügen dargestellt und mit den Zielsetzungen der Faktorenanalyse verglichen. Interkorrelationen (n = 301) der 9 FPI-Standardskalen (Halbform — A) wurden mit beiden Verfahren analysiert. In beiden Fällen lassen sich trennbare Variablengruppen finden, die im Rahmen bisheriger Ergebnisse der Persönlichkeitsforschung interpretiert werden können. Anwendungsprobleme beider Verfahren werden diskutiert.

Einleitung

Das Auffinden von Zusammenhangsstrukturen stellt ein altes statistisches Problem dar. In der Psychologie wurden zu diesem Zwecke faktorenanalytische Methoden eingesetzt. Da die Faktorenanalyse von verschiedenen Seiten kritisiert wurde (Dempster, 1969; Orlik, 1967; Kalveram, 1970), jedoch weiter angewandt wird, ist es wünschenswert, die Problematik von Zusammenhangsstrukturen neu zu überdenken und geeignete Alternativverfahren zur Faktorenanalyse zu entwikkeln. In dieser Arbeit stellen wir ein Suchverfahren nach sogenannten Kovarianzselektionsmodellen als mögliche Alternative vor.

Kovarianzselektion

Die Theorie der Kovarianzselektion wurde von A. P. Dempster (1972) formuliert. Ein Kovarianzselektionsmodell macht Aussagen über die Zusammenhangsstruktur von mehreren normalverteilten Variablen.

Die Dichtefunktion von p multivariat normalverteilten Variablen mit unbekannter Kovarianzstruktur läßt sich wie folgt schreiben:

$$(1)\quad f(x) = \left(\tfrac{1}{2\pi}\right)^{p/2} \mid \Sigma \mid^{-1/2} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\, x^T \Sigma^{-1} x\right\}$$

Dabei sei x ein $p \times 1$ dimensionaler Vektor und Σ sowohl als auch Σ^{-1} seien beide positiv definite symmetrische Matrizen. Dann sind die Elemente der Matrix Σ, die in den Positionen (i, j) und (i, i) stehen, die Kovarianz (σ_{ij}) zwischen x_i und x_j bzw. die Varianz von x_i. Das (i, j)-te Element der Inversen Σ^{-1} wird die Konzentration von x_i und x_j genannt und mit σ^{ij} bezeichnet.

Die verschiedenen möglichen Kovarianzselektionsmodelle entstehen dadurch, daß ausgewählte Konzentrationen (für $i \neq j$) zu Null gesetzt werden. Um den Begriff der Konzentration zu veranschaulichen, zeigen wir ein Beispiel mit drei Variablen. Es sei R die beobachtete Korrelationsmatrix $[r_{ij}]$ mit der Determinante D_{123} und der Inversen

$$(2)\quad R^{-1} = \frac{1}{D_{123}} \begin{bmatrix} 1-r_{23}^2 & -(r_{12}-r_{23}r_{13}) & -(r_{13}-r_{12}r_{23}) \\ & 1-r_{13}^2 & -(r_{23}-r_{12}r_{13}) \\ & & 1-r_{12}^2 \end{bmatrix}$$

Diese Inverse kann mit Hilfe der beobachteten partiellen Korrelationskoeffizienten ($r_{ij.k}$) und mit Hilfe der Determinanten (D_{ij}) von Teilmatrizen umgeschrieben werden. Mit

$$(3)\quad r_{ij.k} = \frac{(1-r_{ik}^2)^{1/2}(1-r_{jk}^2)^{1/2}}{r_{ij}-r_{ik}r_{jk}}$$

$$D_{ij} = 1 - r_{ij}^2.$$

ergibt sich

$$(4)\quad R^{-1} = \frac{1}{D_{123}} \begin{bmatrix} D_{23} & -r_{12.3}(D_{13}D_{23})^{1/2} & -r_{13.2}(D_{12}D_{23})^{1/2} \\ & D_{13} & -r_{23.1}(D_{12}D_{13})^{1/2} \\ & & D_{12} \end{bmatrix}$$

Aus (1), (4) und einer analogen Darstellung für die theoretische Korrelationsmatrix läßt sich zeigen, daß eine Konzentration σ^{ij} einfach ein Vielfaches des partiellen Korrelationskoeffizienten $\varrho_{ij.k}$ ist. Daraus folgt — unter der Annahme, daß die Kovarianzmatrix positiv definit ist —, daß eine Nullkonzentration damit gleichbedeutend ist, daß der partielle Korrelationskoeffizient des Variablenpaares Null ist. Daher lassen sich Kovarianzselektionsmodelle als Zusammenhangsmuster mit bestimmten partiellen Nullassoziationen interpretieren (Wermuth, 1976 a). Weiterhin bedeutet eine Konzentration von Null, daß eine einfache Korrelation der beiden zugehörigen Variablen völlig durch die Korrelationen der anderen Variablen erklärbar ist. Anders ausgedrückt, besagt eine Nullkonzentration, daß das zugehörige Variablenpaar bedingt unabhängig ist. Zahlreiche bedingte Unabhängigkeiten bewirken, daß sich die Variablen in zusammengehörige und trennbare Variablengruppen gliedern lassen und daß die Zusammenhangsstruktur relativ leicht interpretierbar wird.

Anhand von Likelihoodquotiententests läßt sich prüfen, ob ein bestimmtes Kovarianzselektionsmodell mit den Daten gut vereinbar ist. Zur Dichte in (1) ergibt sich die Likelihoodfunktion L ausgewertet am Maximum-Likelihood Schätzer $\hat{\Sigma}$ als:

$$(5) \quad L = \left(\tfrac{1}{2\pi}\right)^{np/2} |\hat{\Sigma}|^{-n/2} \exp - \tfrac{p}{2}.$$

Bezeichnen L_1 und L_2 die Likelihood und $\hat{\Sigma}_1$, $\hat{\Sigma}_2$ die zugehörigen Maximum-Likelihood-Schätzer für die Kovarianzstruktur bei zwei verschiedenen Modellannahmen, so ist die Likelihoodquotientengröße definiert als:

$$(6) \quad LQ - \chi^2 = -2 \ln (L_1/L_2) = n \ln (|\hat{\Sigma}_1|/|\hat{\Sigma}_2|).$$

Diese Prüfgröße ist für große Beobachtungszahlen n annähernd Chi-Quadrat verteilt. Sie mißt, wie stark die beiden Schätzer $\hat{\Sigma}_1$ und $\hat{\Sigma}_2$ voneinander abweichen. Die Freiheitsgrade der Prüfgröße sind gleich der Anzahl der Nullkonzentrationen, die für Σ_1 zusätzlich zu Σ_2 postuliert werden. Werden keine Nullkonzentrationen gefordert, so ist die beobachtete Kovarianzmatrix, S, der Maximum-Likelihood-Schätzer. Für $\hat{\Sigma}_2 = S$ gibt die Prüfgröße in (5) somit an, wie gut das Kovarianzselektionsmodell mit dem Schätzer $\hat{\Sigma}_1$ zu den Daten paßt.

Die Berechnung eines Maximum-Likelihood-Schätzers Σ ist im allgemeinen nicht ohne aufwendige iterative Rechenverfahren möglich. Für sogenannte multiplikative Modelle jedoch lassen sich die Likelihoods faktorisieren und die Prüfgrößen besonders einfach, ohne explizite Bestimmung des zugehörigen $\hat{\Sigma}$, berechnen, so daß sich solche Modelle für ein Modellsuchverfahren besonders eignen. Multiplikative Modelle sind darüber hinaus nicht an eine bestimmte Verteilung gebunden, so daß sich ein Suchverfahren innerhalb multiplikativer Modelle analog auch für qualitative Daten formulieren läßt (W e r m u t h, 1976 b, 1976 c).

Modellsuchverfahren

Ausgehend von der Situation, in der keine Nullkonzentrationen gefordert werden, wird schrittweise überprüft, wie viele und welche Variablenpaare als bedingt unabhängig gelten können. Im ersten Schritt wird dasjenige Variablenpaar ausgewählt, für das die Annahme einer Nullkonzentration am besten mit den Daten vereinbar ist. Genauer gesagt wird für jedes Variablenpaar die Likelihoodquotientenprüfgröße für seine Nullkonzentration berechnet und das Variablenpaar mit der kleinsten Prüfgröße wird ausgewählt. Wir zeigen im nächsten Abschnitt, daß das auf diese Weise ausgewählte Paar den kleinsten partiellen Korrelationskoeffizienten hat.

Es genügt, Korrelationen statt Kovarianzen zu betrachten, da für die Prüfgrößen in (6) nur Determinanten benötigt werden, da

$$(7) \quad |S| = s_{11}\ s_{22}\ , \ldots ,\ s_{pp}\ |R|$$

gilt und da die beobachteten Varianzen s_{ii} bei allen Kovarianzselektionsmodellen unverändert die σ_{ii} schätzen. Bezeichnen wir mit K die Indizes aller Variablen außer i und j und mit D_K, D_{iK}, D_{ijK} die Determinanten der beobachteten Korrelationsmatrizen mit den Variablen K, iK, ijK, weiterhin mit $r_{ij.K}$ den partiellen Korrelationskoeffizienten nach Ausschaltung des Einflusses aller weiteren Variablen (K) für das Variablenpaar (i, j), so läßt sich die Determinante von R wie folgt berechnen:

$$(8) \quad |R| = D_{ijK} = \frac{D_{iK}\,D_{jK}}{D_K}\ (1-r_{ij.K}^2).$$

Nun sei R_1 die Korrelationsmatrix, die dadurch impliziert wird, daß genau $\sigma^{ij} = 0$ und damit $\varrho_{ij.K} = 0$ ist, so stimmt R_1 bis auf das Element (i, j) mit R überein und

$$(9) \quad |R_1| = \frac{D_{iK}D_{jK}}{D_K}$$

Die Prüfgrößen für genau eine Nullassoziation werden damit für alle (i, j) und K:

$$(10) \quad \begin{aligned} n \ln (|R_1|/|R|) &= -n\ \{\ln D_{ijK} - (\ln D_{iK} + \ln D_{jK} - \ln D_K)\} \\ &= -n\ \ln (1-r_{ij.K}^2) \end{aligned}$$

Das Variablenpaar mit der kleinsten Prüfgröße hat somit den kleinsten partiellen Korrelationskoeffizienten.

Tabelle 1

Modelle für vier Variable

Modellart				Beispiele	
Fall	Anzahl der bedingt unabhängigen Paare	Anzahl der möglichen Modelle	Bedingt unabhängige Variablenpaare	Bezeichnung des Modells	Determinante der implizierten Matrix
a	1	6	(3,4)	123/124	$D_{123}\,D_{124}\,/\,D_{12}$
b_1	2	12	(3,4) (2,4)	123/14	$D_{123}\,D_{14}\,/\,D_1$
b_2	2	3	(3,4) (1,2)	ergibt kein multiplikatives Modell	
c_1	3	4	(3,4) (2,4) (1,4)	123/4	$D_{123}\,D_4\,/\,D_0$*)
c_2	3	12	(3,4) (2,4) (1,2)	13/14/23	$D_{13}\,D_{14}\,D_{23}\,/\,D_1\,D_3$
c_3	3	4	(3,4) (2,4) (2,3)	12/13/14	$D_{12}\,D_{13}\,D_{14}\,/\,D_1^2$
d_1	4	3	(3,4) (2,4) (1,2) (1,3)	14/23	$D_{14}\,D_{23}\,/\,D_0$
d_2	4	12	(3,4) (2,4) (1,4) (2,3)	12/13/4	$D_{12}\,D_{13}\,D_4\,/\,D_1\,D_0$
e	5	6	alle außer (1,2)	12/3/4	$D_{12}\,D_3\,D_4\,/\,D_0^2$
f	6	1	alle	1/2/3/4	$D_1\,D_2\,D_3\,D_4\,/\,D_0^3$

*) Definition: $D_0 \equiv 1$.

Im zweiten Schritt der Modellsuche wird ein zweites Variablenpaar ausgewählt, dessen partielle Assoziation so schwach ist, daß sie zu Null gesetzt werden kann. Die zugehörige Korrelationsmatrix R_2 stimmt sodann bis auf zwei Elemente mit der beobachteten Korrelationsmatrix überein. Sofern R_2 ein multiplikatives Modell charakterisiert, wird die Berechnung der Prüfgröße für die zusätzliche Nullkonzentration analog zu (10) vorgenommen (Wermuth, 1976 b) und n ln ($|R_2|/|R_1|$) mißt, wie sehr sich R_1 und R_2 unterscheiden. Überschreitet diese Prüfgröße das 95 % oder 99 % Quantil der zugehörigen Chi-Quadrat-Verteilung, so kann man die Anpassung der Modellannahmen an die Daten als zu schlecht ansehen. Andernfalls versucht man in einem weiteren Auswahlschritt ein passendes Modell mit drei Nullkonzentrationen zu finden.

Die Bezeichnung jedes multiplikativen Modells ist komplementär zur Konstellation der zugehörigen bedingt unabhängigen Variablenpaare. Um dies zu verdeutlichen, geben wir in Tabelle 1 eine Übersicht der für vier Variable möglichen Modelle.

Aus der Modellbezeichnung 123/14 etwa lassen sich einerseits die zusammengehörigen Variablengruppen (123) und (14) ablesen, andererseits die bedingt unabhängigen Variablenpaare: (2,4) und (3,4). In der letzten Spalte der Tabelle ist angegeben, wie sich für jedes multiplikative Modell die Determinante der — durch die Modellannahmen — implizierten Korrelationsmatrix berechnen läßt.

In Tabelle 2 ist für eine hypothetische Folge von ausgewählten Variablenpaaren angeführt, welche Hypothesen bei den einzelnen Auswahlschritten überprüft werden und wie sich die entsprechenden Prüfgrößen errechnen lassen. Ist in Tabelle 2 etwa als erste Prüfgröße diejenige des vierten Auswahlschrittes signifikant, so wird Modell 14/23 abgelehnt, aber Modell 13/14/23 und damit die Annahmen $\sigma^{34} = \sigma^{24} = \sigma^{12} = 0$ akzeptiert. Gleichzeitig werden alle Modelle, für die nur ein Teil dieser Annahmen erfüllt ist, als ebenfalls zu den Daten passend angesehen.

Faktorenanalyse

Um den Vergleich der Kovarianzselektion zu erleichtern, nehmen wir an, daß die p Variablen, die einer Faktorenanalyse unterzogen werden, ebenfalls normalverteilt sind. Es gelte also wie in (1):

(11) $x \sim N\,(O, \Sigma)$.

Im Unterschied zur Kovarianzselektion stellt man sich bei der Faktorenanalyse die Kovarianzmatrix Σ als aus zwei Komponenten zusammengesetzt vor

(12) $\Sigma = \Lambda\Lambda' + \Psi$.

Tabelle 2

Auswahlschritte für ein hypothetisches Beispiel mit vier Variablen

Auswahl-schritt	Ausge-wähltes Variablen-paar	Zu prüfende Hypothese: neue Annahme	Zu prüfende Hypothese: bereits erfüllte Annahmen	Likelihoodquotientenprüfgröße ($LQ - \chi^2$)	Modell-bezeich-nung
1	(3,4)	$\sigma^{34} = 0$	—	$-n\{\ln D_{1234} - (\ln D_{123} + \ln D_{124} - \ln D_{12})\}$	123/124
2	(2,4)	$\sigma^{24} = 0$	$\sigma^{34} = 0$	$-n\{\ln D_{124} - (\ln D_{12} + \ln D_{14} - \ln D_{1})\}$	123/14
3	(1,2)	$\sigma^{12} = 0$	$\sigma^{34} = \sigma^{24} = 0$	$-n\{\ln D_{123} - (\ln D_{13} + \ln D_{23} - \ln D_{3})\}$	13/14/23
4	(1,3)	$\sigma^{13} = 0$	$\sigma^{34} = \sigma^{24} = \sigma^{12} = 0$	$-n\{\ln D_{13} - (\ln D_{1} + \ln D_{3} - \ln D_{0})\}$	14/23
5	(2,3)	$\sigma^{23} = 0$	$\sigma^{34} = \sigma^{24} = \sigma^{12} = \sigma^{13} = 0$	$-n\{\ln D_{23} - (\ln D_{2} + \ln D_{3} - \ln D_{0})\}$	14/2/3
6	(1,4)	$\sigma^{14} = 0$	$\sigma^{34} = \sigma^{24} = \sigma^{12} = \sigma^{13} = \sigma^{23} = 0$	$-n\{\ln D_{14} - (\ln D_{1} + \ln D_{4} - \ln D_{0})\}$	1/2/3/4

Dabei ist Λ die $p \times r$ Matrix der Faktorladungen ($r < p$) und Ψ ist die $p \times p$ Diagonalmatrix mit Varianzen der sogenannten Fehlerkomponenten als Diagonalelemente. Genauer gesagt ergibt sich (12) daraus, daß die p beobachteten Variablen als eine Linearkombination künstlicher, „latenter" Variablen dargestellt werden:

(13) $x = \Lambda f + e.$

Dabei sind f und e $r \times 1$ bzw. $p \times 1$ dimensionale Faktoren und es sollen die folgenden verteilungstheoretischen Annahmen erfüllt sein

(14) $f \sim N\,(O, I)$; $e \sim N\,(O, \Psi)$ und $E\,(f'\,e) = O.$

Λ und Ψ stellen die zu schätzenden Größen des Faktorenmodells dar. Eine rechentechnisch günstige Maximum-Likelihood-Schätzung ist nach Jöreskog (1967) möglich. In der Praxis wird dagegen noch weitaus am häufigsten die Methode der Hauptachsen- oder Hauptfaktorenanalyse zur Schätzung der Faktorladungen verwendet. In beiden Fällen werden für eine eindeutige Schätzung bestimmte Zusatzannahmen getroffen.

Der Anspruch der Faktorenanalyse, Zusammenhangsstrukturen von Variablen aufdecken zu können, gründet sich, wie aus (12) und (13) zu sehen ist, auf die Bildung neuer, hypothetischer Variablen. Diese hypothetischen „latenten" Variablen erlauben es, die beobachteten Variablenkorrelationen in einem neuen, als einfacher angesehenen Bezugssystem darzustellen. Dabei geht man von der Vorstellung aus, daß sich die p beobachteten Variablen auf wesentlich weniger, nämlich r gemeinsame Faktoren zurückführen lassen. Da die gemeinsamen Faktoren als wechselseitig unkorreliert angenommen werden, erhält man mit den Faktorladungen ein künstliches Variablenraster, in das die beobachteten Merkmale eingeordnet werden.

Die Eindeutigkeit der Lösungen für die Parameter des Faktorenmodells ist durch das Modell allein nicht gegeben, sondern erst durch Zusatzbedingungen möglich (vgl. Lawley und Maxwell, 1971). Dies führt zu dem bekannten Rotationsproblem der Faktorenanalyse: die berechnete Faktorladungsmatrix kann durch eine lineare Transformation in beliebig viele Ladungsmatrizen überführt werden. Die Zahl der möglichen Lösungen, die die Modellgleichung erfüllen, vergrößert sich noch, wenn die Annahme unkorrelierter Faktoren fallengelassen wird, so daß eine Interpretation der Zusammenhangsstruktur schwieriger wird. Gerade die mit den Rotationsproblemen zusammenhängenden Fragen führten zu dem Einwand, daß einer Faktorenanalyse stets etwas willkürliches anhaftet. Man sollte aber bedenken, daß bei der Begründung und Ausgestaltung der Methode Überlegungen inhaltlich-psychologischer Art eine große

Rolle spielten (als Beispiel Thurstones faktorielle Einfachstruktur) und die Frage offen bleiben muß, inwieweit dieses Verfahren auf andere als die ursprünglichen Anwendungsgebiete in der Psychologie zu übertragen ist.

Anwendung auf Persönlichkeitsmerkmale

Wir berichten nun über die Ergebnisse einer Kovarianzselektion und einer Faktorenanalyse der 9 FPI-Standard-Skalen (Halbform A). Die Daten beruhen auf einer Stichprobe von 301 unausgelesenen, für klinische Vergleichungszwecke untersuchten Kontrollpersonen[1]).

Tab. 3 zeigt die Korrelationsmatrix der 9 FPI-Standard-Skalen. Es erschien uns gerechtfertigt, die Korrelationen über alle Personen zu berechnen, da die FPI-Skalenwerte normiert sind bezüglich Alter und Geschlecht. Die hier gefundenen Korrelationskoeffizienten bewegen sich ihrer Höhe nach in dem Bereich, der auch von anderen Autoren angegeben wird (Fahrenberg u. a., 1973; Baumann, 1973; Hobi und Klär, 1973).

Auch die Ergebnisse der Faktorenanalyse stehen in guter Übereinstimmung sowohl mit der Faktorenanalyse, die an den Daten der Eichstichprobe berechnet wurde (Fahrenberg u. a., 1973), wie auch mit den Lösungen von Hobi und Klär (1973). In Tab. 4 sind die nach dem Varimax-Kriterium rotierten Faktorladungen der 2-Faktoren- und 5-Faktoren-Lösung angegeben. Als Kommunalitätenschätzungen dienten die von Fahrenberg u. a. (1973) angegebenen Konsistenzkoeffizienten der Halbform FPI — A.

Obwohl die Eigenwertabfolge hier nur eine 2-Faktoren-Lösung nahelegt, sind einige Restkorrelationen bei dieser Lösung noch so deutlich von 0 verschieden, daß wir auch die 5-Faktoren-Lösung berücksichtigen können. Diese Lösung zeigt bezüglich der Restkorrelationen eine gute Anpassung der Ladungen an die beobachteten Korrelationen. Die beiden Faktorenmuster entsprechen der in der Literatur berichteten Faktorenstruktur des FPI (vgl. Fahrenberg u. a., 1973). Die Faktoren können entsprechend identifiziert und interpretiert werden. Lediglich Skala FPI 2 (Aggressivität) ist in unserer Stichprobe wesentlich stärker mit FPI 4 (Erregbarkeit) und FPI 7 (Dominanzstreben) assoziiert als mit FPI 9 (Offenheit). Die Frage muß offen bleiben, ob dies mehr als Effekt

1) Die Daten wurden im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 36 der DFG erhoben.

Tabelle 3

Interkorrelationen der 9 FPI-Standard-Skalen (Halbform A, n = 301)

FPI — 1	Nervosität									
FPI — 2	Aggressivität	3569								
FPI — 3	Depressivität	6473	4816							
FPI — 4	Erregbarkeit	4095	4872	6000						
FPI — 5	Geselligkeit	— 1761	0505	— 2004	— 0627					
FPI — 6	Gelassenheit	— 2167	— 0805	— 3272	— 2846	3897				
FPI — 7	Dominanzstreben	2068	3687	1946	3805	1477	0860			
FPI — 8	Gehemmtheit	4893	1709	5315	3236	— 4160	— 2949	0444		
FPI — 9	Offenheit	2671	3849	4441	3812	— 0510	— 2361	1119	2805	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9

Tabelle 4

Rotierte Faktorladungen der 2-Faktoren- und 5-Faktoren-Lösung

	Faktor				Faktor						
Skala	I	II	h^2	α	I	II	III	IV	V	h^2	α
1	59	40	52	79	82	08	—07	20	09	74	79
2	73	—05	53	69	24	03	—37	60	—06	56	69
3	72	45	72	79	68	25	—33	31	13	75	79
4	74	18	58	75	33	34	—24	62	03	67	75
5	12	—73	55	72	—10	—24	—02	10	—78	69	72
6	—12	—63	41	70	—14	—75	13	03	—26	67	70
7	53	—26	35	56	07	—11	02	69	—06	50	56
8	33	64	52	69	55	07	—19	05	51	61	69
9	54	22	34	74	17	13	—80	14	04	71	74
% der rot. Varianz	59	41			29	14	17	23	17		
% der Spur (Reliabilität)	41	29			26	13	16	22	15		

h^2 = Kommunalität
α = Reliabilitätskoeffizient

der Stichprobenzusammensetzung und -erhebung oder als Effekt der Halbformen zu werten ist.

Im folgenden soll nun untersucht werden, ob die Anwendung der Methode der Kovarianzselektion Zusammenhangsstrukturen liefern kann, die einerseits einfach gebaut sind, aber dennoch eine gute Anpassung an die beobachtete Korrelationsmatrix der FPI-Standard-Skalen erlauben. Es ist zu prüfen, ob solche Strukturen im Rahmen bisheriger Ergebnisse der empirischen Persönlichkeitsforschung interpretiert werden können. Da gerade die Inventarisierung und Validierung testpsychologisch definierter Persönlichkeitseigenschaften fast ausschließlich mit Hilfe faktorenanalytischer Verfahren vorgenommen wurde, könnten die so gewonnenen Ergebnisse in hohem Maße methodenspezifisch sein. Es ist daher wichtig, diese Ergebnisse mit anderen Verfahren zu überprüfen.

In Tab. 5 sind die Auswahlschritte bei der Modellsuche mit Hilfe der Kovarianzselektion aufgeführt. Für jeden der $\binom{9}{2} = 36$ möglichen Auswahlschritte ist angegeben, für welches Variablenpaar die bedingte Abhängigkeit durch Nullsetzen der Partialkorrelation beseitigt wurde und wie groß die zugehörige Prüfgröße mit einem Freiheitsgrad ist. Die Bezeichnung der nach jedem Auswahlschritt angenommenen Modelle wurde der Übersichtlichkeit wegen nur für einige Schritte explizit angeführt.

Bei der Entscheidung für ein gut zu den Daten passendes Modell sind die beiden Gesichtspunkte: Einfachheit des Modells und Güte der Anpassung gegeneinander abzuwägen. Je mehr Variablenpaare ausgewählt werden, bedingt unabhängig zu sein, desto einfacher wird im allgemeinen die Struktur eines Modells, aber desto schlechter wird die Anpassung an die Daten.

Für unsere Daten wird die Modellanpassung erstmals bei Schritt 15 fraglich (LQ — χ^2 ist größer als $\chi^2_{.95} = 3.84$), bei Schritt 20 schlecht (LQ — χ^2 ist größer als $\chi^2_{.99} = 6.63$) und ab Schritt 23 sehr schlecht. Aus diesen Erwägungen entscheiden wir uns für das Modell des 19ten Auswahlschrittes.

Um das Wesentliche dieses Modelles schneller zu erfassen und uns die Interpretation zu erleichtern, werden bereits getrennte Variablengruppen zunächst wieder zusammengefaßt: die Gruppen (138), (358), (356) zu (13568) und die Gruppen (2347), (2369) zu (234679). Auf diese Weise erhalten wir Modell 13568/234679.

Ein Vergleich der in Tab. 6 aufgeführten unter diesen Modellannahmen berechneten marginalen Korrelationen mit den beobachteten marginalen Korrelationen der Tab. 3 zeigt, daß alle wichtigen beobachteten Korrelationen gut reproduziert werden. Ferner ist aus den in Tab. 6 aufgeführten partiellen Korrelationen ersichtlich, welche Variablenpaare bei diesen Modellannahmen bedingt unabhängig sind.

Tabelle 5

Auswahlschritte bei der Modellsuche

Auswahl-schritt	gewähltes Variablen-paar	LQ — χ^2	angenommenes Modell
1	(1,5)	0,000	12346789/23456789
2	(1,6)	0,003	
3	(6,8)	0,002	
4	(1,4)	0,07	
5	(4,8)	0,50	123789/235679/234679
6	(4,5)	0,75	
7	(1,9)	1,25	
8	(1,2)	1,08	
9	(2,8)	1,82	
10	(8,9)	1,96	1378/3578/235679/234679
11	(5,9)	1,00	
12	(7,9)	0,91	
13	(4,9)	2,30	
14	(2,5)	3,71	1378/3578/3567/23467/2369
15	(1,7)	4,95	
16	(7,8)	0,00	
17	(6,9)	5,23	
18	(2,6)	2,10	
19	(5,7)	6,25	138/358/356/2347/2369
20	(4,6)	10,37	
21	(6,7)	7,95	
22	(3,7)	3,95	138/358/356/234/247/239
23	(2,9)	14,63	
24	(1,8)	15,63	
25	(2,7)	15,92	
26	(2,3)	22,95	
27	(3,6)	23,87	
28	(3,5)	0,22	
29	(4,7)	47,08	
30	(5,6)	49,58	
31	(5,8)	57,20	
32	(3,9)	66,12	
33	(3,4)	77,85	
34	(2,4)	25,08	
35	(3,8)	99,92	
36	(1,3)	163,44	1/2/3/4/5/6/7/8/9

Tabelle 6

Implizierte Korrelationen für Modell 13568/234679

marginale

	1	2	3	4	5	6	7	8
1 Nervosität								
2 Aggressivität	**·3113**							
3 Depressivität	·6473	·4816						
4 Erregbarkeit	**·3888**	·4872	·6000					
5 Geselligkeit	-·1761	**-·0684**	-·2004	**-·1522**				
6 Gelassenheit	-·2167	-·0805	-·3272	-·2846	·3897			
7 Dominanzstreben	**·1251**	·3687	·1946	·3805	**·0153**	·0860		
8 Gehemmtheit	·4893	**·2455**	·5315	**·3308**	-·4160	-·2949	**·0831**	
9 Offenheit	**·2879**	·3849	·4441	·3812	**-·1219**	-·2361	·1119	**·2483**

partielle

	1	2	3	4	5	6	7	8
1 Nervosität								
2 Aggressivität	**·0000**							
3 Depressivität	·4408	·2103						
4 Erregbarkeit	**·0000**	·1826	·3234					
5 Geselligkeit	·0159	**·0001**	·0648	**·0000**				
6 Gelassenheit	·0209	·0965	-·1275	-·1732	·3088			
7 Dominanzstreben	**·0000**	·2338	-·0461	·3009	**-·0001**	·1713		
8 Gehemmtheit	·2183	**·0000**	·2486	**·0000**	-·3406	-·0268	**·0000**	
9 Offenheit	**·0000**	·2037	·1702	·0996	**·0000**	-·0990	-·0547	**·0000**

Modell 13568/234679 ist dadurch gekennzeichnet, daß die zwei Variablengruppen (158) und (2479) völlig unabhängig voneinander sind, nachdem jede dieser Variablengruppen vom Einfluß der Variablen 3 und 6 bereinigt wurde. Diese Struktur drückt sich in den Korrelationskoeffizienten so aus, daß die partiellen Interkorrelationen zwischen den Variablengruppen (158) und (2479) verschwinden (vgl. Tab. 6). In Daten von Personengruppen, die hinsichtlich der Merkmale FPI 3 und FPI 6 homogen sind, dürften die Merkmalsgruppen (158) und (2479) auch marginal kaum mehr interkorrelieren.

In der faktorenanalytischen Terminologie würde man bei diesem Modell zwei Faktoren erwarten, die jeweils hohe Ladungen in den Variablen (158) bzw. (2479) aufweisen. Es kann vermutet werden, daß die gemeinsame Korrelation der Variablen 3 und 6 mit beiden Gruppen sich als Doppelladung in den beiden Faktoren zeigen lassen. Die bereits dargestellten Ergebnisse der 2-Faktoren-Lösung bestätigen diese Erwartungen bezüglich der Variablen 3. An Stelle der Variablen 6 weist bei der Faktorenanalyse Variable 1 Doppelladungen auf.

Zur Interpretation der hier gefundenen Zusammenhangsstruktur lassen sich neben den Ergebnissen von Faktorenanalysen des FPI auch die in der Übersichtsarbeit von Pawlik (1968) zusammengestellten Ergebnisse heranziehen. Danach würde man die Variablengruppe FPI 2 (Aggressivität), FPI 4 (Erregbarkeit), FPI 7 (Dominanzstreben) und FPI 9 (Offenheit) dem Bereich der Emotionalität zuordnen. Zu dem „Komplex der offen eingeräumten Aggressionstendenz" (Fahrenberg u. a., 1973) passen die Merkmale von Erregbarkeit (Reizbarkeit, geringe Frustrationstoleranz und aufbrausende Affekte) und Dominanzstreben (reaktiv aggressiv, sich durchsetzend). Diese Emotionalitätskennzeichen sind wieder gekoppelt mit dem Syndrom der Depressivität, aggressive, reizbare, sich durchsetzende Probanden schildern sich eher mißgestimmt, stimmungslabil und selbstunsicher (FPI 3) sowie leicht irritierbar und zögernd (FPI 6). Nach der von Eysenck (z. B. 1967) beschriebenen Eigenschaftsdimension des Neurotizismus würde die Skala FPI 1 (Nervosität) gut die hier erfaßte emotionale Labilität durch psychosomatische Beschwerden ergänzen, ein Befund, der jedoch nur durch die Faktorenanalyse bestätigt wird.

FPI 1 erweist sich bei der Kovarianzselektion als gekoppelt mit den Variablen 5 (Geselligkeit), 6 (Gelassenheit) und 8 (Gehemmtheit) sowie 3 (Depressivität). Diese Variablengruppe erscheint etwas uneinheitlicher als die beschriebenen Emotionalitätskennzeichen. Hier liefern die einzelnen Merkmalsgruppen 138/358/356, die zusammengefaßt wurden, nähere Hinweise. Das Muster 138 weist wieder Beziehungen zum Eysenckschen Konzept der emotionalen Labilität auf, jedoch fehlt hier die Komponente der Affektlabilität; es handelt sich eher um den Typus des psychosomatisch Gestörten, gekennzeichnet durch Kontaktschwäche, Mißstimmungen und Minderwertigkeitsgefühle.

Die Variablengruppe 358 erinnert eher an die Eigenschaftsdimension Extraversion—Introversion: besonders kennzeichnend sind die Variablen FPI 5 (Geselligkeit) und FPI 8 (Gehemmtheit), in denen Kontaktbedürfnis bzw. Kontaktfähigkeit zum Ausdruck kommt. Die durch FPI 3 (Depressivität) hinzukommende Komponente der Selbstsicherheit und Zufriedenheit fügt sich ebenfalls plausibel in dieses Bild.

Schwieriger ist die Interpretation der Variablengruppe 356: Hier treten neben dem Extraversionskennzeichen FPI 5 (Geselligkeit) die Selbstsicherheit und das Selbstvertrauen beschreibende Merkmale (FPI 3 und FPI 6) stärker in den Vordergrund.

Insgesamt gesehen tendiert das Variablenmuster (13568) mehr zu der allgemeinen Persönlichkeitsdimension der Extraversion—Introversion (FPI 5 und FPI 8), wobei jedoch durch die Variablen FPI 1, FPI 3 und FPI 6 eine deutliche dysthyme Färbung erkennbar ist. FPI 3 und FPI 6 sind die Merkmale, die durch ihre Korrelationen mit den Variablen der beiden zusammengefaßten Gruppen die Verbindung zwischen den Variablengruppen herstellen. Besonders Skala 3 (Depressivität) überdeckt die einfachen, beobachteten Korrelationen so, daß die Zusammenhangsstruktur der Persönlichkeitsmerkmale nicht ohne weiteres aus der Korrelationsmatrix ersichtlich ist.

Diskussion

Als ein gemeinsames Ziel der Kovarianzselektion und der Faktorenanalyse kann das Zusammenfassen von Variablengruppen genannt werden. Während bei der Kovarianzselektion die Auswahl bedingt unabhängiger Variablenpaare zu bestimmten Unabhängigkeitshypothesen über Variablengruppen führt, versucht man bei der Faktorenanalyse eine Zuordnung einzelner Variablen zu neuen konstruierten Variablen, den Faktoren zu treffen.

Der Ansatz der Kovarianzselektion unterscheidet sich von dem faktorenanalytischen Ansatz so sehr, daß die bei beiden Verfahren auftretenden Schwierigkeiten nur schwer gegeneinander abgewogen werden können. Zu den Problemen der Faktorenanalyse existiert eine umfangreiche Literatur (zusammengefaßt bei Harmann, 1967); restlos befriedigende Lösungen sind jedoch bis heute nicht verfügbar. Das Kommunalitätenproblem zum Beispiel hängt damit zusammen, daß der Faktorenanalyse eine bestimmte Theorie der Meßdaten zugrunde liegt, wie sie in der klassischen Testtheorie (z.B. Guilford, 1954) ausgeführt wird. Weitere Probleme entstehen durch die Rotation der Faktorladungen. Der Faktorenanalyse entsprechende meßtheoretische Vorstellungen über die Daten — die häufig Ansatzpunkte der Kritik darstellen (Lord u. Novick, 1968; Fischer, 1968) — gehen in die Kovarianzselektion nicht ein. Der Ansatz der Kovarianzselektion ist insofern als empirischer anzusehen.

Diejenigen Modelle, die mit Hilfe der Kovarianzselektionsmethode aufgewiesen werden können, entsprechen einer begrenzten Anzahl von eindeutig definierten Hypothesen über Zusammenhangsstrukturen. Jedes der Modelle ist eindeutig dadurch beschrieben, daß die partiellen Korrelationen bestimmter Variabler zu Null gesetzt werden. Es kann jeweils geprüft werden, wie gut die Modellannahmen mit den Daten vereinbar sind. Bei der Faktorenanalyse dagegen kann eine Zusammenhangsstruktur aus dem Muster der Faktorladungen herausgelesen werden. Prüfverfahren für die Verträglichkeit eines Ladungsmusters mit der beobachteten Korrelationsmatrix werden in der Literatur nur für bestimmte faktorenanalytische Verfahren beschrieben (Jöreskog, 1967). Die Zusammenhangsstrukturen sind nicht so eindeutig festgelegt wie bei der Kovarianzselektion. Von Faktorenanalytikern wurde in diesem Zusammenhang von der Unverbindlichkeit der Faktorenanalyse gesprochen (Orlik, 1967).

An dieser Stelle müssen auch einige Schwierigkeiten der Kovarianzselektionsmethode erwähnt werden. Die Anzahl der den Korrelationen zugrundeliegenden Beobachtungen beeinflußt stark die Modellfindung.

Bei höheren Fallzahlen wird es schwierig, einfache Modelle als mit den Daten vereinbar aufzuzeigen. Das Verfahren reagiert schnell auf Änderungen in den Daten und ist somit besonders abhängig von Meßfehlern und Stichprobeneffekten. Hier könnte bei bestimmten Fragestellungen ein Vorteil der gegen Änderungen in den Korrelationen unempfindlicheren Faktorenanalyse gesehen werden. Ein weiterer Gesichtspunkt, der das Auffinden der Modellstruktur beeinflußt, ist die Reihenfolge der Variablenauswahl (in etwa vergleichbar mit Problemen der aufbauenden bzw. abbauenden Vorgehensweise bei Regressions- und Diskriminanzanalysen). Bei der in der vorliegenden Arbeit durchgeführten Form der Modellsuche wurden darüber hinaus lediglich multiplikative Modelle zugelassen, wodurch eine Vorentscheidung über die möglichen Ergebnisse getroffen wird.

Eine der Kovarianzselektionsmethode und der Faktorenanalyse gemeinsame Schwierigkeit liegt in der Auswahl des die Daten am „besten" reproduzierenden Modells. An dem in dieser Arbeit analysierten Datensatz wurde diese Schwierigkeit deutlich.

Die Faktorenanalyse läßt sich besonders als hypothesengenerierendes Verfahren charakterisieren. Ein gleiches gilt auch für die Kovarianzselektionsmethode, sie besitzt jedoch darüber hinaus den Vorteil, nicht nur als Suchverfahren, sondern auch als statistisches Prüfverfahren eingesetzt werden zu können. Zum Beispiel kann die hier gefundene Zusammenhangsstruktur der FPI-Skalen an einer weiteren Stichprobe mit Hilfe eines Likelihoodquotiententests überprüft werden. Die Notwendigkeit der Kreuzvalidierung einmal gefundener Ergebnisse besteht grundsätzlich und wird auch von Faktorenanalytikern gesehen (s. Pawlik, 1968). Die dazu eingesetzten Methoden zum Vergleich von Faktorstrukturen können jedoch nicht als strenge statistische Prüfverfahren angesehen werden, sie sollten eher deskriptiv aufgefaßt werden (Gebhard, 1967). Mit der Kovarianzselektionsmethode dagegen liegt eine Methode der multivariaten Datenanalyse vor, mit der — auf der Grundlage einer ausgearbeiteten statistischen Theorie — Zusammenhänge gefunden und überprüft werden können.

Summary

We describe and compare covariance selection in method and purpose with factor analysis.

Correlations of nine FPI — (Freiburger Persönlichkeitsinventar, Halbform A) standardscales are analysed by both methods. In both cases we found separable variable groups, that can be interpreted in the context of former personality research.

Problems of application are discussed for both methods.

Résumé

La méthode de la covariance-selection est décrite dans ses traits principaux et comparée aux fixations de l'analyse factorielle. Des intercorrelations (n = 301) des neuve échelles du FPI (forme A) sont analysées à l'aide des deux méthodes. Ces deux procédés permettent de trouver des catégories de variables bien séparables qui peuvent être interprétées dans la mésure des résultats précédents aux recherches de la personalité.

Des problémes actuels d'application de cettes deux méthodes sont discutés.

Literatur

Baumann, U. (1973): Untersuchung zur Stichprobenabhängigkeit von FPI-Ergebnissen. Z. Klin. Psychol. **2**, 85—104.

Dempster, A. P. (1969): Elements of continuous multivariate analysis. Reading, Mass.

Dempster, A. P. (1972): Covariance selection. Biometrics **28**, 157—175.

Eysenck, H. J. (1967): The biological basis of human personality. London.

Fahrenberg, J., Selg, H., Hampel, R. (1973²): Das Freiburger Persönlichkeitsinventar FPI, Handanweisung. Göttingen.

Fischer, G. H. (Hg.) (1968): Psychologische Testtheorie. Bern u. Stuttgart.

Gebhard, F. (1967): Über die Ähnlichkeit von Faktormatrizen. Psychol. Beiträge **10**, 591—599.

Guilford, J. P. (1954): Psychometric methods. New York.

Harmann, H. H. (1967²): Modern factor analysis. Chicago.

Hobi, V. u. Klär, A. (1973): Ein Beitrag zur Faktorenstruktur des FPI. Diagnostica **19**, 88—96.

Jöreskog, K. G. (1967): Some contributions to maximum likelihood factor analysis. Psychometrica **32**, 443—482.

Kalveram, K. T. (1970): Über Faktorenanalyse. Kritik eines theoretischen Konzepts und seine mathematische Neuformulierung. Archiv für Psychologie **122**, 92—118.

Lawley, D. N. u. Maxwell, A. E. (1971²): Factor analysis as a statistical method. London.

Lord, F. H. u. Novick, M. R. (1968): Statistical theories of mental test scores. Reading (Mass.).

Orlik, P. (1967): Das Dilemma der Faktorenanalyse — Zeichen einer Aufbaukrise in der modernen Psychologie. Psychol. Beitr. **10**, 87—98.

Pawlik, K. (1968): Dimensionen des Verhaltens. Bern.

Wermuth, N. (1976 a): Analogies between multiplicative models in contingency tables and covariance selection. Biometrics (erscheint im März).

Wermuth, N. (1976 b): Model search among multiplicative models. Biometrics (erscheint im Juni).

Wermuth, N. (1976 c): Anmerkungen zur Konfigurationsfrequenzanalyse. Z. f. klin. Psychol. Psychotherapie (erscheint im März).

Anschriften der Verfasser:

Dr. Nanny Wermuth
Institut für Medizinische Statistik und
Dokumentation der Universität
Langenbeckstraße 1
6500 Mainz

Dr. Volker Hodapp
Psychologisches Institut der Universität
Abt. für Entwicklungs- und Pädagogische Psychologie
Saarstraße 21
6500 Mainz

Dr. Geerd Weyer
Institut für Psychologie der Universität
Mertonstraße 17
6000 Frankfurt am Main