# Algebraisk topologi

Det är sällan möjligt att, med algebraiska metoder, avgöra om två topologiska rum $X$ respektive $Y$ är homeomorfa. I homotopiteori använder man den svagare ekvivalensrelation “homotopiekvivkalenta” i stället för “homeomorfa”. Det finns flera resultat som ger algebraiskt definierade invarianter som i många fall är tillräcka för att avgöra om $X$ och $Y$ är homotopiekvivalenta. Under våren kommer jag att ge en inledande kurs (7 poäng) i algebraisk topologi. Jag kommer att gå igenom grundläggande begrepp och tekninker inom algebraisk topologi med viss tonvikt på homotopiteori.
En preliminär uppläggning är som följer:

1. Överlagringar och fundamentalgruppen.

   Vi inför fundamentalgruppen av ett rum $X$ och ser hur den kan användas för att förstå så kallade överlagringar över $X$. Van Kampens sats ger ett hjälpmedel för beräkning av fundamentalgrupper. Vi ser på några tillämpningar av teorin för överlagringar.

2. Högre homotopigrupper och grundläggande begrepp i homotopiteori.

   Vi definierar de högre homotopigrupperna. Dessa är i allmänhet mycket svåra att beräkna. En stor del av teknikerna i algebraisk topologi har utvecklats med detta problem i siktet. Vi definierar fibreringar och kofibreringar och härleder en lång exakt följd för homotopigrupperna av en fibrering.

3. Simpliciala komplex och CW-komplex.

   Vi definierar vissa rum som kallas simpliciala komplex respektive CW-komplex och visar grundläggand egenskaper hos dem. De är intressanta för klassen av rum som är homotopiekvivalenta med sådana är mycket stor, så de utgör ett väsentligt tekniskt hjälpmedel. Vi visar att avbildningar mellan sådana rum är homotopa med simpliciala respektive cellulära avbildningar. Detta leder till en del satser om högre homotopigrupper och definition av och egenskaper hos så kallade Eilenberg-MacLane-rum.

4. Singulär (ko)homologi.

   Vi definierar dessa grupper av ett rum $X$ och ser att de är homotopiinvarianter och visar så kallade excisionsegenskaper, som är viktiga för beräkningar och leder till Mayer-Vietoris följden. Vi härleder Künneths formel som talar om hur (ko)homologin av $X \times Y$ är relaterad till (ko)homologin för $X$ och $Y$. Vi ser på de universella koefficientsatserna, som bland annat relaterar kohomologi till homologi. Vi inför en ringstruktur på kohomologi och gör en del kalkyler. Vidare kommer vi att se att kohomologi “representeras” av Eilenberg-MacLane-rum.

5. (Ko)homologi av mångfalder.

   Vi definierar orientering av (topologiska) mångfalder och visar den så kallade Poincaré-dualiteten mellan kohomologi och homologi för måmgfalder. Vi ser på en rad geometriska tillämpningar.

6. Hurewiczavbildningen och obstruktionsteori.

   Hurewicz sats relaterar homotopigrupperna och homologigrupperna för $X$. Detta samspel är i allmänhet mycket komplicerat. Vi analyserar problemet att utvidga en avbildning $A \to Y$ från ett delrum $A$ till $X$ till hela $X$, med hjälp av homologigrupper.

7. Spektralföjlder och kalkyler.

   Vi konstruerar Serres så kallade Spektralföljd och ser hur den leder till excisionsresultat i homotopiteori, Freudenthals suspensions sats och en rad kalkyler. Denna sats är en av utgångspunkterna i stabil homotopiteori som är ett stort och aktivt forskningsområde inom algebraisk topologi.

Under kursens gång kommer föreläsningsanteckningar att delas ut. Till en början blir det två föreläsningstillfällen á två timmar per veckca. Första samling i grupprum 1 den 22 januari kl 10.15.

Jan Alve