Linjära system av differentialekvationer

1 Inledning

Vi har i studioövning 3 sett på allmäna system av differentialekvationer med begynnelsevillkor

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)), \quad a \leq t \leq b \\ \mathbf{u}(a) = \mathbf{u}_a \end{cases}$$

Vi har också lärt oss att lösa dem i MATLAB med Euler framåtmetoden eller t.ex. `ode45`. I den här studioövningen kommer vi se på allmänna *linjära system* av differentialekvationer

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t), \quad a \leq t \leq b \\ \mathbf{u}(a) = \mathbf{u}_a \end{cases} \tag{1}$$

där $\mathbf{A}$ är en konstant $n \times n$-matris. Sambandet mellan $\mathbf{f}$ och matrisen $\mathbf{A}$ ges av

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$$

Det är enkelt att lösa system (1) i MATLAB enligt

```
>> f=@(t,u)A*u
>> [t,U]=ode45(f,[a,b],ua)
```

Till skillnad från de flesta icke-linjära system så kan vi lösa de linjära analytiskt (dvs. exakt) med *egenvärdesmetoden*, se Lay kapitel 5.7.

2 Riktningsfält och fasporträtt

För att få en lite bättre uppfattning av vilka egenskaper systemet (1) har så skall vi titta närmare på högerledet: $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$. Funktionen $\mathbf{f}$ är exempel på en vektorvärd funktion och kallas *vektorfält* (dessa kommer att studeras mer i kursen i flervariabelanalys).

För varje initialvärde till (1) så har vi en (okänd) lösning $\mathbf{u}(t)$. Från differentialekvationen har vi

$$\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \tag{2}$$

Vektorfältet $\mathbf{f}$ ger oss i varje punkt $\mathbf{u}$ den riktning i vilken lösningen förändras och dess längd ger förändringstakten. Genom att i ett lämpligt antal punkter $\mathbf{u}$ markera styrka och riktning för vektorn $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ med en pil så får vi ett *riktningsfält*.

Genom att rita upp detta riktningsfält får vi ungefärlig information om hur lösningen $\mathbf{u}(t)$ till ekvationen beter sig för samtliga möjliga startvärden. Vi kan alltså skapa kurvan $\mathbf{u}(t)$ genom att sätta pennan på den startpunkt $\mathbf{u}_a$ vi önskar och sedan följa pilarna.

För att rita vektorfält i planet använder vi kommandot `quiver`. Men först måste vi skapa ett gitter (grid) med de punkter i vilka vi vill sätta ut pilar (som beskriver vektorfältets storlek och riktning i respektive punkt).

Som exempel tar vi (från studioövning 3): Volterra-Lotka-ekvationerna $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(t))$ med

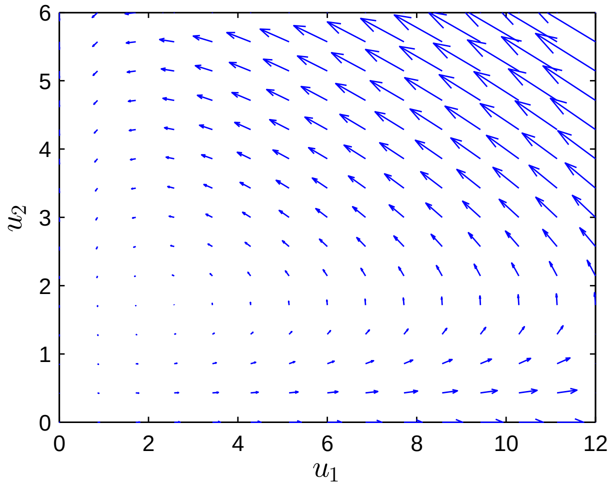
$$\mathbf{f}(\mathbf{u}(t)) = \begin{bmatrix} a\, u_1(t) - b\, u_1(t)\, u_2(t) \\ -c\, u_2(t) + d\, u_1(t)\, u_2(t) \end{bmatrix}$$

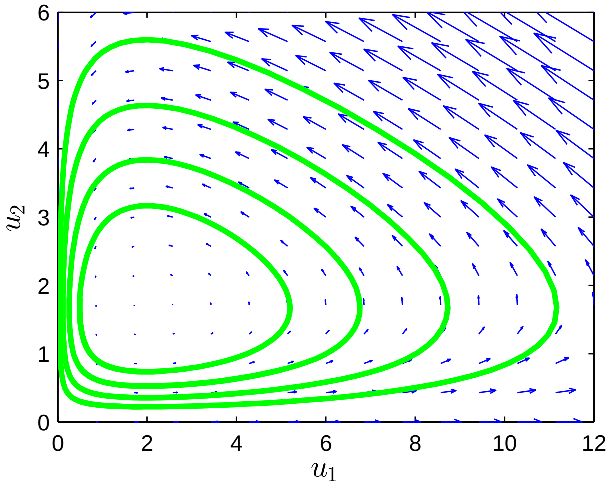
där a, b, c, d är konstanter.

Vi ritar riktningsfältet enligt

```
>> a=0.5; b=0.3; c=0.2; d=0.1;
>> u1=linspace(0,12,15); u2=linspace(0,6,15);
>> [U1,U2]=meshgrid(u1,u2);
>> f1=@(u1,u2)a*u1-b*u1.*u2; f2=@(u1,u2)-c*u2+d*u1.*u2;
>> s=2;          % s - skalfaktor som förlänger pilarna.
>> quiver(U1,U2,f1(U1,U2),f2(U1,U2),s)
>> axis([0 12 0 6]), hold on
```

och får en bild där pilarnas riktning visar fältets riktning.





Vi kan också lägga till några *strömlinjer* (lösningsbanor) med funktionen `streamline`, som bygger på approximationen

$$\mathbf{u}(t+h) \approx \mathbf{u}(t) + h\mathbf{f}(\mathbf{u}(t))$$

vilket vi känner igen som Euler framåtmetoden på systemet (2). Vi väljer dock att följa noggrannare med `ode45` enligt

```
>> f=@(t,u)[f1(u(1),u(2)); f2(u(1),u(2))];
>> T=30; tspan=linspace(0,T,200);
>> U0=[2.0;0.3];
>> [t,U]=ode45(f,tspan,U0);
>> plot(U(:,1),U(:,2),'g','LineWidth',2)
```

Vi löser för några ytterligare startvärden och får figuren ovan till höger.

Tidigare har vi främst ritat ut graferna för koordinatfunktionerna $u_1(t)$ och $u_2(t)$, men det är också naturligt att visualisera lösningen i ett så kallat *fasporträtt* där vi ritar $u_1(t)$ mot $u_2(t)$. Det blir extra intressant att rita in en sådan kurva (bana) i ett riktningsfält.

Som exempel på ett linjärt system tar vi (Lay, Exempel 2, kapitel 5.7)

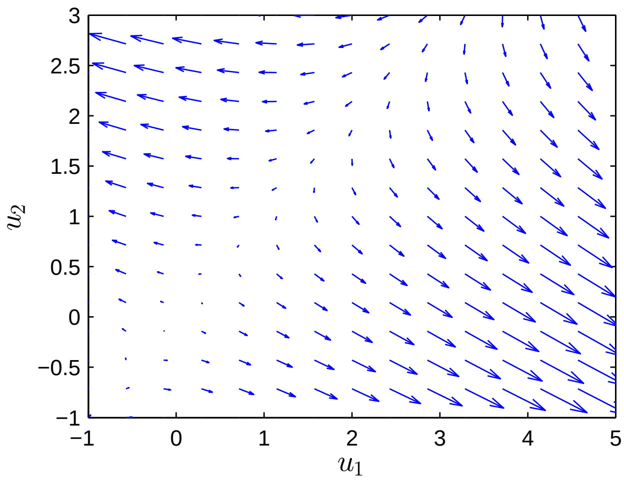
$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t), & 0 \le t \le T \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

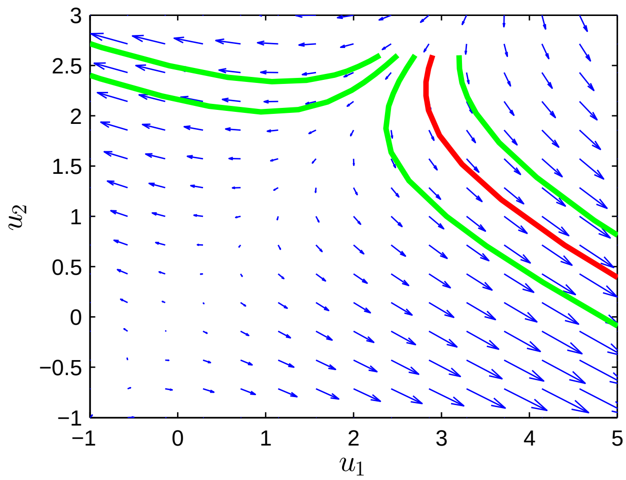
där

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u_0} = \begin{bmatrix} 2.9 \\ 2.6 \end{bmatrix}$$

Vi ritar riktningsfältet

```
>> A=[4 -5;-2 1];
>> u1=linspace(-1,5,20);u2=linspace(-1,3,20);
>> [U1,U2]=meshgrid(u1,u2);
>> F1=A(1,1)*U1+A(1,2)*U2;
>> F2=A(2,1)*U1+A(2,2)*U2;
>> quiver(U1,U2,F1,F2,1.5)
>> axis([-1 5 -1 3]), hold on
```





En (numerisk) lösning får vi enligt följande:

```
>> f=@(t,u)A*u;
>> u0=[2.9;2.6];
>> [t,U]=ode45(f,[0 5],u0);
>> plot(U(:,1),U(:,2),'r','LineWidth',2)
```

Vi ser hur lösningen $\mathbf{u}(t)$ följer fältets riktning i figuren ovan till höger. Där har vi även ritat ut lösningar för några andra begynnelsevillkor.

Uppgift 1. Betrakta begynnelsevärdesproblemet:

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t), & 0 \le t \le T \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

Rita riktningsfält och fasporträtt då

(a). $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad T = 5.$

(b). $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad T = 7.$

3 Egenvärdesmetoden

Antag att $\mathbf{A}$ är en diagonaliserbar 2×2-matris med en bas av egenvektorer $\mathbf{v_1}$ och $\mathbf{v_2}$ och med tillhörande egenvärden λ_1 respektive λ_2. Då ges lösningen till

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t), \quad 0 \leq t \leq T \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

av formeln

$$\mathbf{u}(t) = c_1\mathbf{v}_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t},$$

där koefficienterna c_1 och c_2 bestäms av startvärdena $\mathbf{u}_0$.

Vi sätter $t = 0$ och får

$$\mathbf{u}(0) = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Detta visar att

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{u}_0, \quad (\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0),$$

där matrisen $\mathbf{V} = [\ \mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2\ ]$ (kolonnerna är egenvektorerna till matrisen $\mathbf{A}$).

Som exempel ser vi åter på

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}, \quad 0 \leq t \leq T \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

där

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 2.9 \\ 2.6 \end{bmatrix}$$

Med Matlab löser vi egenvärdesproblemet och ritar lösning enligt

```
>> A=[4 -5;-2 1]; u0=[2.9;2.6]; T=10;
>> [V,D]=eig(A)
>> t=linspace(0,T);
>> c=V\u0;
>> U=c(1)*V(:,1)*exp(D(1,1)*t)+c(2)*V(:,2)*exp(D(2,2)*t);
>> plot(U(1,:),U(2,:),'r')
```

Vi beräknar alla egenvärden och egenvektorer med `eig` enligt `[V,D]=eig(A)`. Egenvärdena för matrisen $\mathbf{A}$ hamnar längs diagonalen i `D` och egenvektorerna blir kolonner i `V`.

Lägg märke till hur vi bygger upp `U`, vektorn `t` är en radvektor och t.ex. `V(:,1)` är en kolonn så att `V(:,1)*exp(D(1,1)*t)` blir en matris. Längs första raden i `U`, dvs. `U(1,:)`, kommer $u_1(t)$-värden finnas för de olika t-värden i vektorn `t` och på andra raden, dvs. `U(2,:)`, finner vi motsvarande $u_2(t)$-värden.

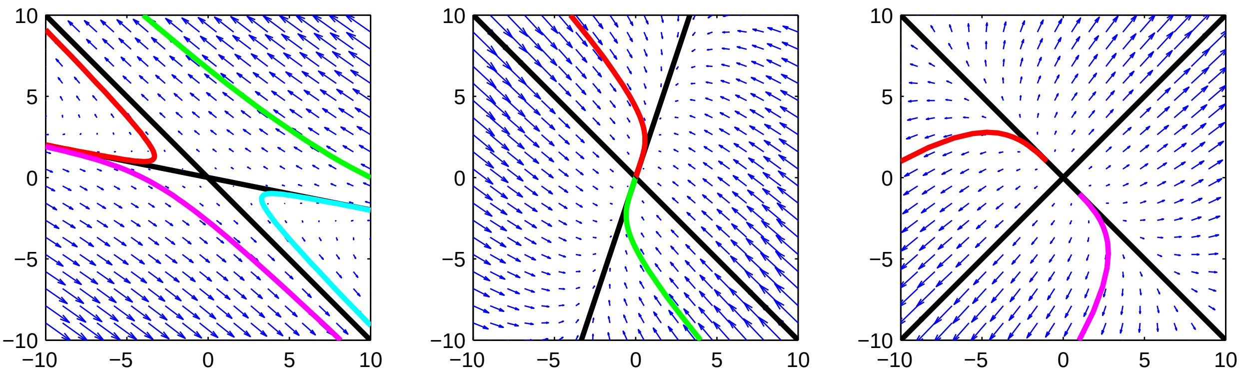
Uppgift 2. Undersök systemet $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t)$ för matriserna $\mathbf{A}$ nedan. Rita i samma graf egenvektorerna till $\mathbf{A}$ och jämför riktningfältets egenskaper med egenvektorerna och motsvarande egenvärden. Förklara sambandet mellan riktningsfältet och matrisens egenvärden och egenvektorer.

Matriserna nedan har reella egenvärden. När utgör origo en *källa* (alla lösningar strömmar från origo), en *sänka* (alla lösningar strömmar till origo) eller en *sadelpunkt* (lösningarna går mot origo men avviker sedan)?

Rita också lösningen till differentialekvationen för några startvärden som ni hittar på själva. Använd ett lagom långt t-intervall.

(a). $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ **(b).** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ **(c).** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

När egenvärdena är reella har egenvektorerna en speciell betydelse (förutom att de bygger upp lösningarna). Om vi ritar linjer genom origo i egenvektorernas riktning får vi en uppdelning av fasplanet i sektorer ut från origo. En lösningskurva kan aldrig korsa en uppdelningslinje, den blir alltid kvar i samma sektor.



Här ovan har vi ritat dessa egenvektorslinjer, som delar upp i sektorer, för matriserna från uppgiften ovan.

Uppgift 3. Undersök systemet $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t)$ för matriserna $\mathbf{A}$ nedan. Nu har vi komplexa egenvärden så origo kommer vara en *spiralpunkt* (lösningarna går i spiral kring origo).

Rita riktningfältet tillsammans med lösningen till differentialekvationen för några startvärden som ni hittar på själva.

(a). $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$ **(b).** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}$