

Dubbelintegraler

1 Inledning

Vi skall börja med att approximera dubbelintegralen av en funktion över ett enkelt rektangulärt område

$$\iint_R f(x, y) dA$$

där $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Sedan skall vi se på allmännare områden.

Enkelintegraler approximerade vi redan i envariabelanalysen och vi skall för dubbelintegraler använda samma typ av approximationer. Då beskrev vi vänster och höger rektangelregel, mitt-punktsregeln och trapetsregeln. Samtliga dessa metoder för enkelintegralen kan generaliseras till multipelintegraler, men vi kommer nöja oss med att titta på dubbelintegraler.

2 Rektangelregeln

I en studioövning i förra läsperioden betraktade vi enkelintegralen över ett intervall

$$\int_a^b f(x) dx$$

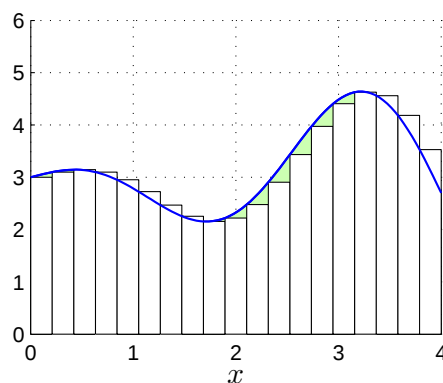
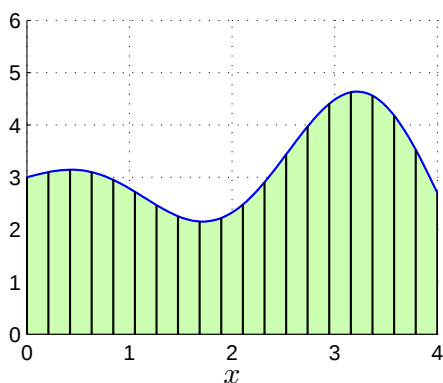
Vi gjorde en likformig indelning av intervallet $a \leq x \leq b$ enligt

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

så att vi fick n lika långa delintervall $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ med samma bredd $\Delta x = h = \frac{b-a}{n}$.

Vi approximerade $f(x)$ med $f(x_{i-1})$ i intervallen $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ och fick *vänster rektangelregel*

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x$$



Nu skall vi upprepa samma resonemang för dubbelintegralen

$$\iint_R f(x, y) dA$$

där $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.

Förutom indelning av intervallet $a \leq x \leq b$, gör vi nu även en likformig indelning av intervallet $c \leq y \leq d$ enligt

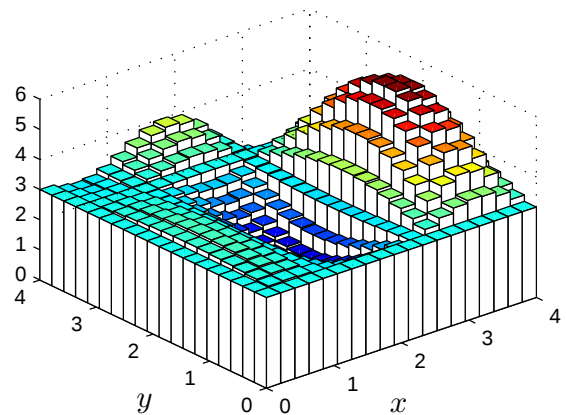
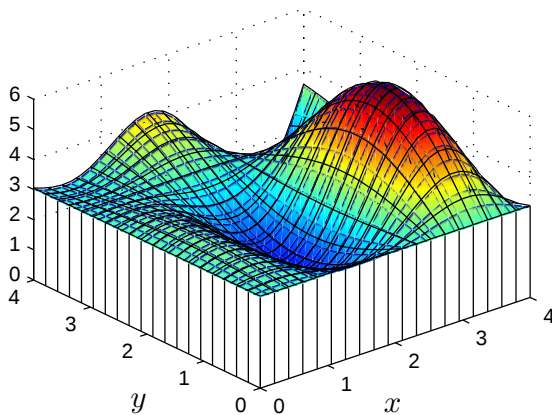
$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d$$

så att vi får m lika långa delintervall $y_{j-1} \leq y \leq y_j$ med samma bredd $k = \frac{d-c}{m}$.

Vi får därmed en indelning av området $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ i nm stycken likformiga små rektanglar som har arean $\Delta A = hk$ var och en.

Om vi approximerar $f(x, y)$ med $f(x_{i-1}, y_{j-1})$ på området $x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j$, får vi **vänster rektangelregel** för dubbelintegralen

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \iint_{R_{i,j}} f(x, y) dA \\ &\approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{i-1}, y_{j-1}) \Delta A \end{aligned}$$



Vi approximerar varje liten delintegral med volymen av ett rätblock vars bas har arean hk och som har höjden $f(x_{i-1}, y_{j-1})$ och sedan summerar vi alla bidragen.

Om vi istället approximerar $f(x, y)$ med $f(x_i, y_j)$ får vi **höger rektangelregel** för dubbelintegralen

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \iint_{R_{i,j}} f(x, y) dA \\ &\approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) \Delta A \end{aligned}$$

Slutligen så får vi ett betydligt noggrannare resultat med **mittpunktsregeln**, där vi beräknar höjden mittpunkten i varje delrektangel, och **trapetsregeln** som vi får genom att ta medelvärde av höjderna (funktionsvärdena) i alla fyra hörnpunkterna i varje delrektangel.

Uppgift 1. Beräkna i MATLAB en approximation av enkelintegralen

$$\int_0^1 x \sin(x) dx$$

med vänster och höger rektangelregel samt trapetsregeln. Använd funktionen `sum` i MATLAB för att få en enklare kod än om man använder `for`-satser.

Uppgift 2. Beräkna nu i MATLAB en approximation av dubbelintegralen

$$\iint_R y \sin(y + xy) dA$$

där $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, -\pi/2 \leq y \leq \pi/2\}$.

Använd vänster och höger rektangelregel samt trapetsregeln. Jämför deras noggrannhet genom att räkna ut det exakta värdet av dubbelintegralen för hand. (Alla elementen i en matris summeras genom att man tar `sum` av `sum`.)

3 Kvadraturprogram i MATLAB

I MATLAB finns t.ex. `integral` för beräkning av enkelintegraler samt `integral2` och `integral3` för beräkning av dubbelintegraler respektive trippelintegraler.

Vi skall som exempel beräkna dubbelintegralen

$$\iint_R y \sin(x) + x \cos(y) dA$$

där $R = \{(x, y) : \pi \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq \pi\}$.

Beskriv alltid integranden som om du skulle rita dess funktionsyta, dvs. tänk på `x` och `y` som matriser och använd komponentvisa operationer. Beräkningen utförs enligt

```
>> f=@(x,y)y.*sin(x)+x.*cos(y);  
>> q=integral2(f,pi,2*pi,0,pi)
```

Som ytterligare ett exempel tar vi

$$\iint_D x^2 \cos(y^3) - 3 \sin(y) dA$$

där $D = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$.

Området kan beskrivas $-1 \leq x \leq 1$, $c(x) \leq y \leq d(x)$, där $c(x) = |x| - 1$ och $d(x) = 1 - |x|$.

Så här utför vi beräkningen i MATLAB:

```
>> f=@(x,y)x.^2.*cos(y.^3)-3*sin(y);  
>> a=-1; b=1; c=@(x)abs(x)-1; d=@(x)1-abs(x);  
>> q=integral2(@(x,y)f(x,y),a,b,c,d)
```

Integrationsgränserna i y -led kan ges av två funktioner, medan integrationsgränserna i x -led måste ges av två tal.

Uppgift 3. Vi skall beräkna integralen

$$\iint_R x e^{xy} dA$$

där $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$.

Rita först funktionsytan till integranden över aktuellt område. Använd sedan `integral2` för att beräkna integralen. Jämför gärna med exakt värde som du i så fall räknar ut för hand och jämför gärna med vad rektangel- och trapetsreglerna ger.

Uppgift 4. Vi skall se på integralen (Exempel 4, Adams 14.2)

$$\iint_D (a - x + y) dA$$

där $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq a - \frac{x^2}{a}\}$.

Läs exemplet i boken och beräkna integralen med `integral2`. Jämför med bokens exakta svar.