Tillämpning av integraler

1 Inledning

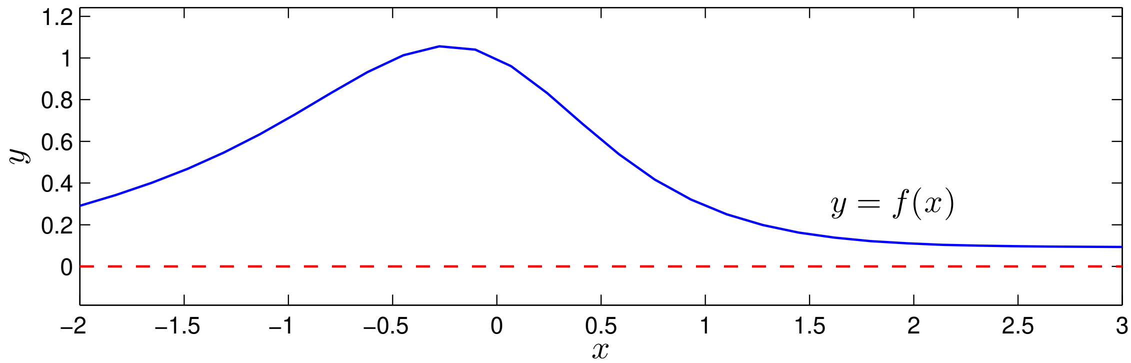
Vi skall se på några tillämpningar av integraler. Först arean och volymen av en rotationskropp sedan längden av en graf och avslutningsvis grafen av en funktion av typen $f(x) = \int_c^d g(t,x)\,dt$.

2 Rotationskroppar

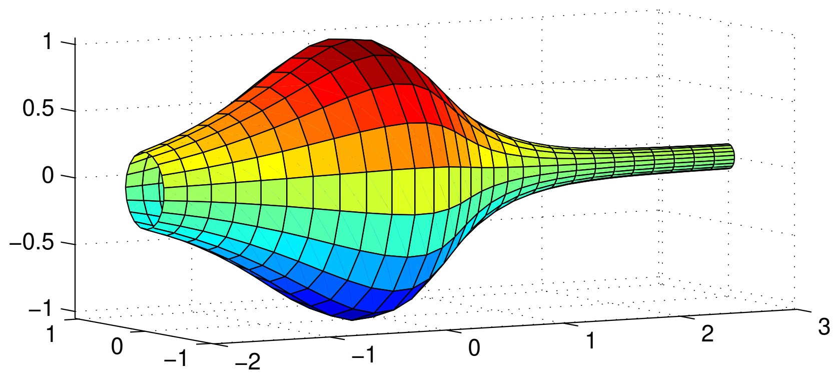
Betrakta kurvan som ger grafen av en funktion $y = f(x)$ över ett intervall $a \le x \le b$. Som exempel kan vi ta

$$f(x) = \frac{1 - 0.5\,\sin(x)}{1 + x^2}, \quad -2 \le x \le 3$$

Så här ser kurvan ut



Låter vi denna kurva rotera runt x-axeln får vi en rotationsyta



och vi vill beräkna den inneslutna volymen samt rotationsytans area.

Volymen som begränsas av rotationsytan ges av (Adams kapitel 7.1, sid 393)

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

och arean av rotationsytan ges av (Adams kapitel 7.3, sid 409)

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

För vårt exempel nöjer vi oss med en numerisk beräkning av volym V och ytarea S enligt

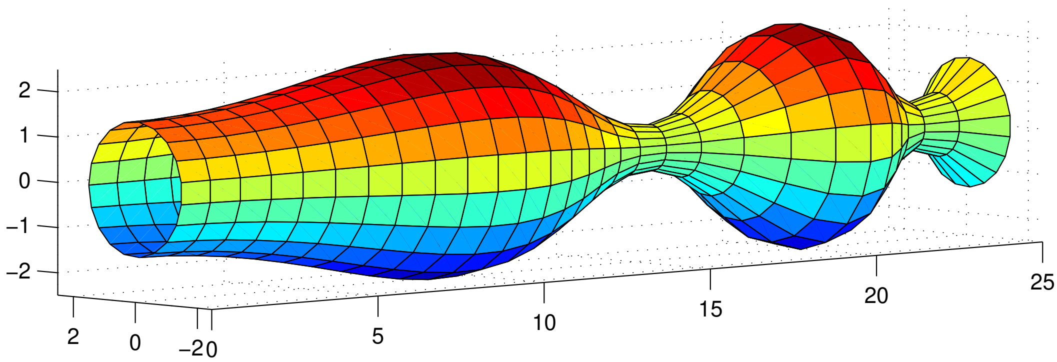
```
>> f=@(x)(1-0.5*sin(x))./(1+x.^2);
>> Df=@(x)-0.5*cos(x)./(1+x.^2)-(1-0.5*sin(x))*2.*x./(1+x.^2).^2;
>> a=-2; b=3;
>> V=pi*integral(@(x)f(x).^2,a,b)
V =
    5.1095

>> S=2*pi*integral(@(x)abs(f(x)).*sqrt(1+Df(x).^2),a,b)
S =
   16.3260
```

Uppgift 1. Beräkna volymen och arean av rotationsytan som bildas då grafen till

$$f(x) = 1.5 + \sin(0.02\, x^2), \quad 0 \le x \le 25$$

roterar runt x-axeln.

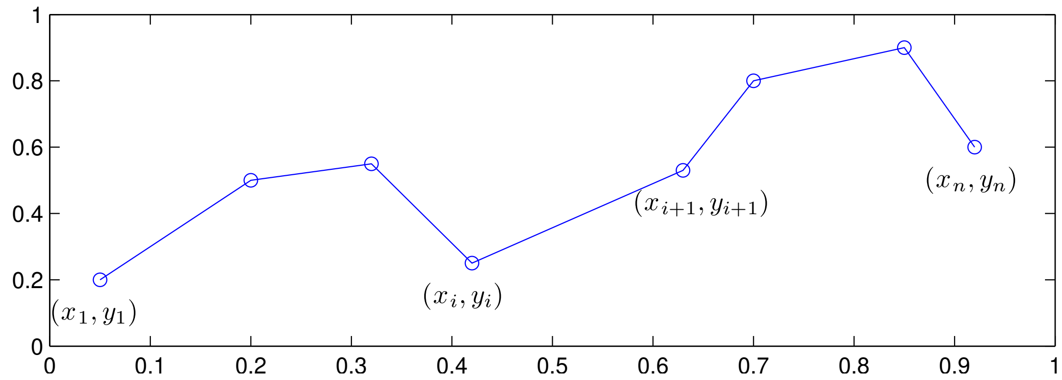
Så här ser ytan ut



Om du vill se koden som genererar ytan kan du titta på funktionen `rotationsyta` som ligger på studiohemsidan (förståelsen får kanske vänta till flervariabelanalysen i läsperiod 3).

3 Båglängd

Vi tänker oss att vi har ett polygontåg $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ som vi ritat en figur av



Vill vi beräkna polygontågets längd kan vi göra det med

$$L = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

Har vi koordinaterna samlade i två vektorer `x` och `y` så beräknar vi längden med

```
>> n=length(x);
>> L=0;
>> for i=1:n-1
       L=L+sqrt((x(i+1)-x(i))^2+(y(i+1)-y(i))^2);
   end
```

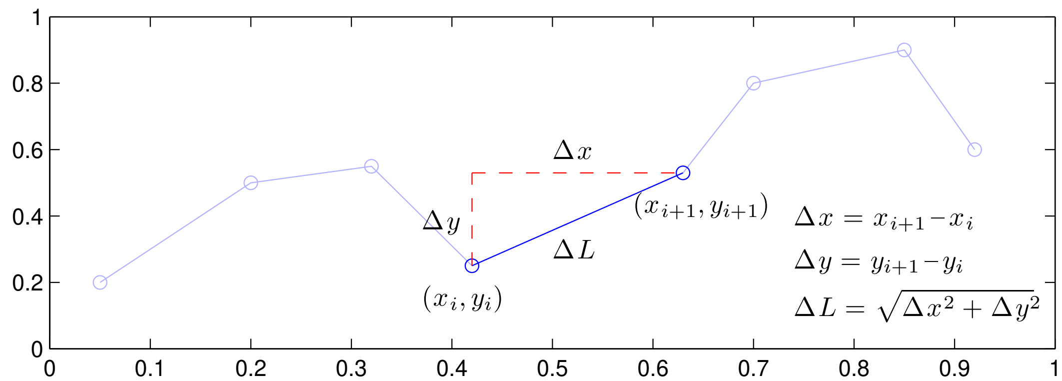
eller lite kortare med s.k. vektorisering

```
>> L=sum(sqrt((x(2:end)-x(1:end-1)).^2+(y(2:end)-y(1:end-1)).^2))
```

alternativt (`diff` som bildar differensen mellan element i vektorn)

```
>> L=sum(sqrt(diff(x).^2+diff(y).^2))
```

Formeln för L, som vi tittade på redan i studioövningen ”Kontrollstrukturer i MATLAB” i läsperiod 1, fås genom att använda Pytagoras sats på varje segment i polygontåget.



När vi ritar en graf till en funktion $f(x)$ över ett intervall $a \leq x \leq b$ är det ett polygontåg $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ vi ritar upp där

$$\begin{aligned} &a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b, \quad \text{med } \Delta x_i = x_{i+1} - x_i \\ &y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2),\ \cdots,\ y_n = f(x_n) \end{aligned}$$

En approximation av längden av grafen får vi genom att beräkna längden av polygontåget.

Vi skall se vad som händer om vi tar allt fler punkter i polygontåget som beskriver grafen, dvs. vi skall låta $\Delta x_i \to 0$ och $n \to \infty$.

Det gäller att

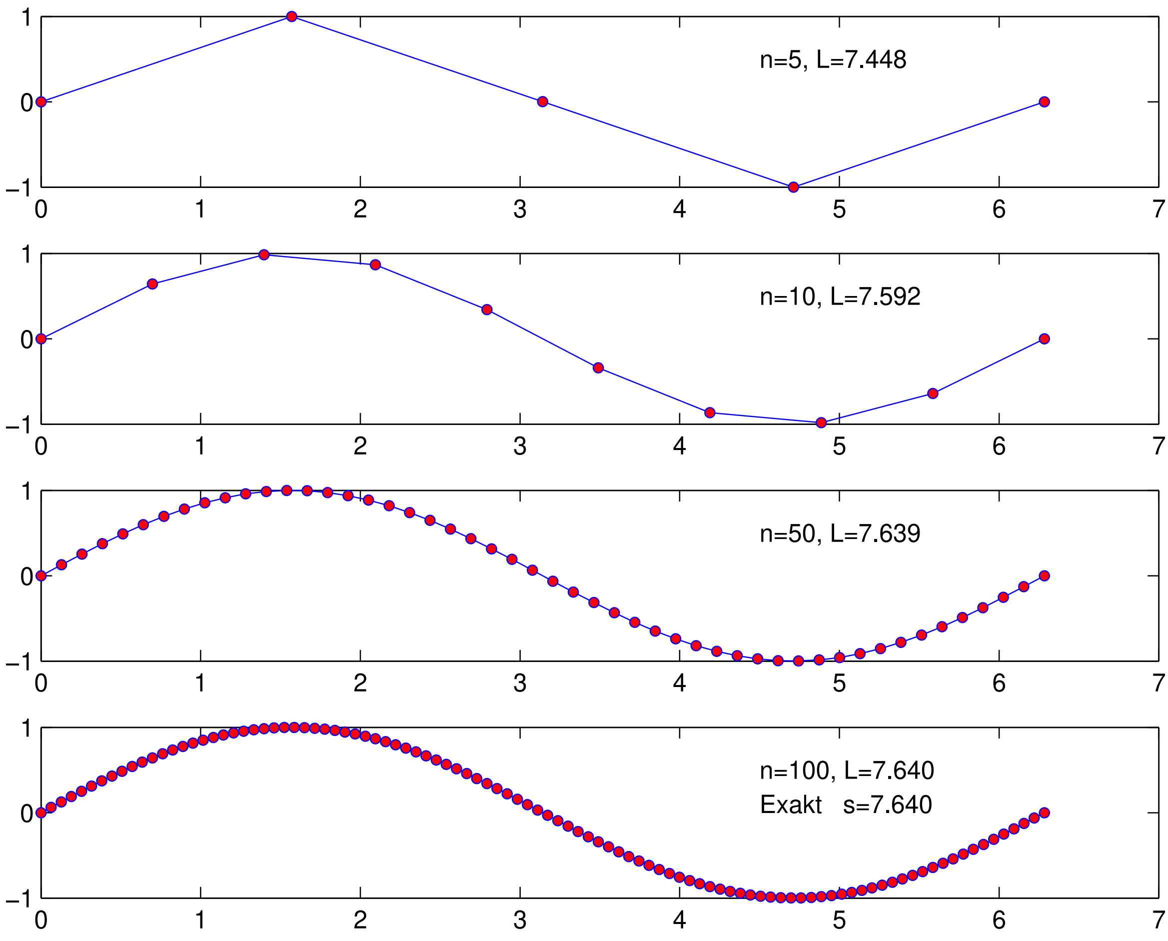
$$L = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2 + (y_{i+1}-y_i)^2} = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{1 + \left(\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2}\, |x_{i+1}-x_i| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}\right)^2}\, \Delta x_i \to \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\, dx, \text{ då } n \to \infty$$

Denna formel hittar ni i Adams kapitel 7.3 sid 405.

Som exempel beräknar vi längden av grafen till $f(x) = \sin(x)$ över intervallet $0 \le x \le 2\pi$.

```
>> n=5;
>> x=linspace(0,2*pi,n);
>> y=sin(x);
>> plot(x,y)
>> L=sum(sqrt(diff(x).^2+diff(y).^2))     % Approximation
>> s=integral(@(x)sqrt(1+cos(x).^2),0,2*pi) % Exakt (dvs. noggrann approximation)
```



Vi ser att vi får konvergens.

Uppgift 2. Beräkna längden av grafen till $f(x) = 1.5 + \sin(0.02\, x^2)$, $0 \le x \le 25$, dvs. funktionen från uppgift 1. Tag successivt n allt större. Rita lämpliga figurer.

4 Grafen av $f(x) = \int_c^d g(t,x)\,dt$

Ibland vill man rita grafen av en funktion definierad genom $f(x) = \int_c^d g(t,x)\,dt$ över ett intervall $a \le x \le b$. Om det inte finns någon användbar primitiv funktion till integranden g är detta en relativt krävande uppgift, för varje x-värde som behövs för grafen måste vi beräkna $f(x)$ genom att beräkna en integral.

Man kan i MATLAB beräkna funktionen $f(x) = \int_c^d g(t,x)\,dt$ för en parameter x, som vi kan ge olika värden, enligt

```
>> f=integral(@(t)g(t,x),c,d)
```

Här förutsätts att `g` är en funktionsbeskrivning (funktionsfil eller anonym funktion med funktionshandtag) i de två variablerna `t` och `x`.

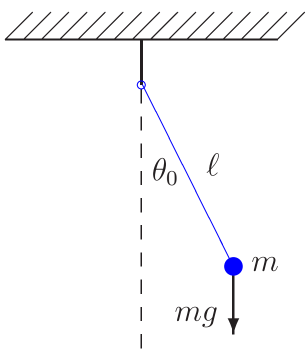
Skall vi nu rita en graf av $f(x)$ över $a \le x \le b$, så är här strukturen på en skriptfil för detta.

```
g=@(t,x)...;               % Integranden, om vi gör ett funktionshandtag
c=...; d=...;              % Integrationsgränserna
a=...; b=...; n=...;       % Intervallgränser för grafen samt antal punkter
x=linspace(a,b,n);         % x-värdena
f=zeros(size(x));          % Fördimensionering. Skall fylla på integralvärdena

for i=1:length(x)
    f(i)=integral(@(t)g(t,x(i)),c,d);   % f(x(i))-värdena
end
plot(x,f)                  % Ritar grafen
```

Vi tittar närmare på `f=zeros(size(x))`. Här ger `size(x)` storleken på radvektorn `x`. Därmed ger `zeros(size(x))` en radvektor, lika stor som `x`, fylld med nollor. Nu kommer `f` vara en radvektor av rätt storlek och vi fyller på rätt $f(x_i)$-värden i `for`-satsen.

Dessa värden, dvs. $f(x_i) = \int_c^d g(t,x_i)\,dt$, beräknas med `f(i)=integral(@(t)g(t,x(i)),c,d)` där `@(t)g(t,x(i))` en anonym funktion med ett funktionshandtag. Här är t variabeln och $g(t,x_i)$ är funktionens värde, där x_i är ett konstant värde. Vi har alltså en funktion i en variabel `t` som `integral` kommer integrera.

Uppgift 3. Den matematiska pendeln. En masspunkt med massan m hänger i en viktlös smal stav av längden ℓ.



Vi vill för olika begynnelseutslag θ_0 bestämma pendelns periodlängd.

Periodlängden ges av formeln

$$T(\theta_0) = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_0/2)\sin^2(\theta)}}$$

där integralen är en s.k. elliptisk integral som saknar användbar primitiv funktion.

Låt $\ell = 0.1$ m och tag begynnelseutslagen $\theta_0 = 10^\circ, 30^\circ, \cdots, 170^\circ$. Beräkna en approximation av periodlängden för de olika begynnelseutslagen. Rita en graf av T som funktion av θ_0. Använd radianer vid integralberäkningarna och dessa skall göras med funktionen `integral`.