Differensapproximationer

Vi behöver approximera derivator $u'(x)$, $u''(x)$, $\cdots$, bl.a. i samband med lösning av differentialekvationer, genom att använda flera funktionsvärden i närheten av x.

Precis som vid definitionen av derivator kommer vi använda differenskvoter. Då lät vi $h \to 0$, nu kommer vi ta h som ett litet positivt tal.

Vi kan approximera derivatan $u'(x)$ med *framåt-* och *bakåtdifferenskvoterna*

$$u'(x) \approx \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \quad \text{och} \quad u'(x) \approx \frac{u(x)-u(x-h)}{h}$$

Låter vi $h \to 0$ så får vi derivatan $u'(x)$. Tar vi h som ett litet positivt tal så får vi en approximation av derivatan. Felet i approximationen halveras om vi halverar h.

Med en *centraldifferenskvot*

$$u'(x) \approx \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}$$

får vi en noggrannare approximation av derivatan $u'(x)$. Felet i approximationen delas med fyra om vi halverar h.

När vi modifierade Newtons metod i förra läsperioden använde vi denna approximation av derivatan.

Vi kan approximera $u''(x)$ med en *centraldifferenskvot* för andraderivatan

$$u''(x) \approx \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}$$

och även här gäller att felet delas med fyra om vi halverar h.

När vi löste värmeledningsproblemet använde vi denna differenskvot som approximation av andraderivatan.

På motsvarande sätt kan vi approximera derivator av ännu högre ordning.