Symbolisk linjär algebra

1 Inledning

Vi har redan sett att verktygslådan Symbolic Math Toolbox i Matlab kan utföra symbolisk matematik inom analys. Nu skall vi se på några exempel på symboliska beräkningar inom linjär algebra.

2 Linjära ekvationssystem

Vi löser det linjära ekvationssystemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Vi skriver in $\mathbf{A}$ och $\mathbf{b}$ med funktionen `sym` som gör att talen lagras som rationella tal.

```
>> A=sym([2 3; 5 4])
A =
[ 2, 3]
[ 5, 4]

>> b=sym([8; 13])
b =
  8
 13
```

Vi gör `rref` exakt med

```
>> rref([A b])
ans =
[ 1, 0, 1]
[ 0, 1, 2]
```

och läser av lösningen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vi kan också lösa exakt med backslash-kommandot (\)

```
>> x=A\b
x =
 1
 2
```

Vi kontrollerar att ekvationssystemet är uppfyllt med

```
>> r=A*x-b
r =
 0
 0
```

Vi kan också ha ett helt symboliskt ekvationssytem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ med

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

```
>> syms a b c d
>> A=[a b; c d]
A =
[ a, b]
[ c, d]

>> syms e f
>> b=[e; f]
b =
 e
 f

>> x=A\b
x =
 -(b*f - d*e)/(a*d - b*c)
  (a*f - c*e)/(a*d - b*c)
```

Notera att vi får division med noll om matrisen singulär, dvs. om $\det(\mathbf{A}) = 0$.

```
>> det(A)
ans =
a*d - b*c
```

Vi ser på residualen med

```
>> r=simplify(A*x-b)
r =
 0
 0
```

Här använde vi `simplify` för att få ett förenklat uttryck. Pröva gärna `r=A*x-b` själva för att se hur det annars ser ut.

Vi kan beräkna inversen $\mathbf{A}^{-1}$ av en matris $\mathbf{A}$ enligt

```
>> A=sym([2 3; 5 4])
A =
[ 2, 3]
[ 5, 4]
```

```
>> B=inv(A)
B =
[ -4/7,  3/7]
[  5/7, -2/7]

>> A*B
ans =
[ 1, 0]
[ 0, 1]
```

Vi ser att $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ som förväntat. Kontrollera gärna att även $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$.

3 Nollrum och kolonnrum

Vi beräknar nollrummet $\mathrm{Nul}(\mathbf{A})$ och kolonnrummet $\mathrm{Col}(\mathbf{A})$ till en matris

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

```
>> A=sym([-3  6 -1  1 -7
           1 -2  2  3 -1
           2 -4  5  8 -4])
A =
[ -3,  6, -1,  1, -7]
[  1, -2,  2,  3, -1]
[  2, -4,  5,  8, -4]

>> N=null(A)
N =
[  2,  1, -3]
[  1,  0,  0]
[  0, -2,  2]
[  0,  1,  0]
[  0,  0,  1]

>> R=colspace(A)
R =
[    1,    0]
[    0,    1]
[  1/5, 13/5]
```

Vi har alltså $\mathrm{Nul}(\mathbf{A}) = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ där

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och $\mathrm{Col}(\mathbf{A}) = \mathrm{Span}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ där

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 13 \end{bmatrix}$$

4 Egenvärdesproblem

Vi löser egenvärdesproblemet $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ med

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

```
>> A=sym([2 3 1; 5 4 6; 1 0 2])
A =
[ 2, 3, 1]
[ 5, 4, 6]
[ 1, 0, 2]

>> [V,D]=eig(A)
V =
[     2 - 2*3^(1/2),     2*3^(1/2) + 2, -2]
[ 5 - (8*3^(1/2))/3, (8*3^(1/2))/3 + 5,  1]
[                 1,                 1,  1]

D =
[ 4 - 2*3^(1/2),             0, 0]
[             0, 2*3^(1/2) + 4, 0]
[             0,             0, 0]
```

Får alltså egenvärdena $\lambda_{1,2} = 4 \pm 2\sqrt{3}$ och $\lambda_3 = 0$ med motsvarande egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 + 2\sqrt{3} \\ 5 + \frac{9}{3}\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \; \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 - 2\sqrt{3} \\ 5 - \frac{9}{3}\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \; \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi kan lösa det linjära systemet av ODE från ett exempel i laboration 2.

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}, \; t > 0 \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

där

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \; \mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 2.9 \\ 2.6 \end{bmatrix}$$

```
>> A=sym([4 -5; -2 1]);
>> [V,D]=eig(A)
V =
[ 1, -5/2]
[ 1,    1]

D =
[ -1, 0]
[  0, 6]

>> u0=sym([2.9; 2.6]);
>> c=V\u0
c =
 94/35
 -3/35

>> syms t
>> u=c(1)*V(:,1)*exp(D(1,1)*t)+c(2)*V(:,2)*exp(D(2,2)*t)
u =
 94/(35*exp(t)) + (3*exp(6*t))/14
 94/(35*exp(t)) - (3*exp(6*t))/35
```

dvs. lösningsformeln

$$\mathbf{u}(t) = \frac{-3}{70}\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{6t} + \frac{188}{70}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t}$$