

Tillämpningar av integraler

1 Inledning

Vi skall se på några tillämpningar av integraler. Först ser vi på längden av grafer. Därefter ser vi på rotationskroppar och beräknar deras mantelarea och inneslutna volym. Denna laboration är mycket kort så att ni även skall hinna handräkna ordentligt.

2 Kurvlängd

Längden av en graf till en funktion $f(x)$ över ett intervall $a \leq x \leq b$ ges av (Stewart kapitel 8.1)

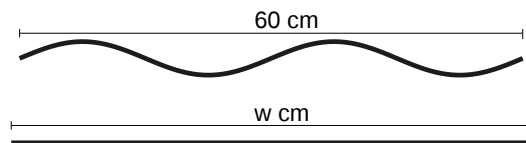
$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Som exempel beräknar vi längden av grafen till $f(x) = \sin(x)$ över intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$.

```
>> f=@(x)sin(x); a=0; b=2*pi;  
>> Df=@(x)cos(x);  
>> x=linspace(a,b);  
>> plot(x,f(x))  
>> g=@(x)sqrt(1+Df(x).^2);  
>> s=integral(g,a,b)  
s =  
    7.6404
```

Uppgift 1. Beräkna längden av grafen av $y(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ över intervallet $1 \leq x \leq 2$. (Jämför gärna ditt svar med exakt svar).

Uppgift 2. Man vill producera takpaneler som är 60 cm breda och 4 cm tjocka genom att bearbeta platta metallplåtar. Panelernas profil har formen av en sinusvåg (se figuren nedan). Verifiera att sinuskurvan har ekvationen $y = 2 \sin(\pi x/15)$ och beräkna bredden w på en platt metallplåt som behövs för att göra en 60 cm panel.

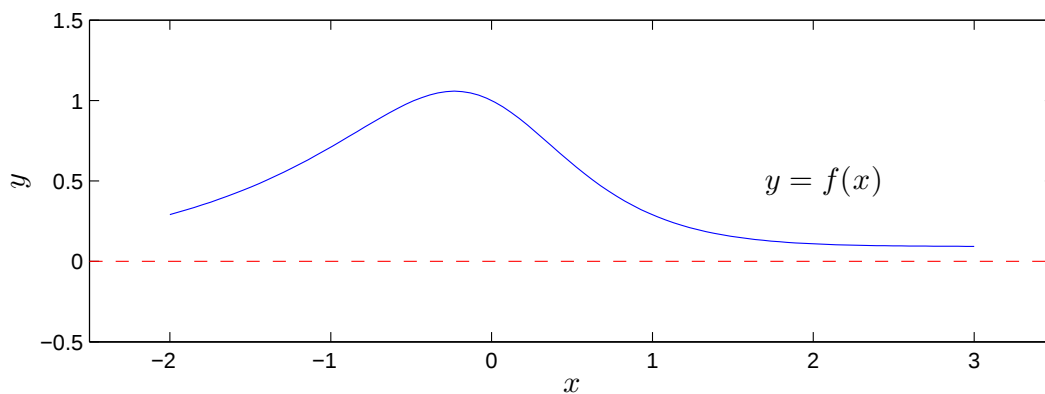


3 Rotationskroppar

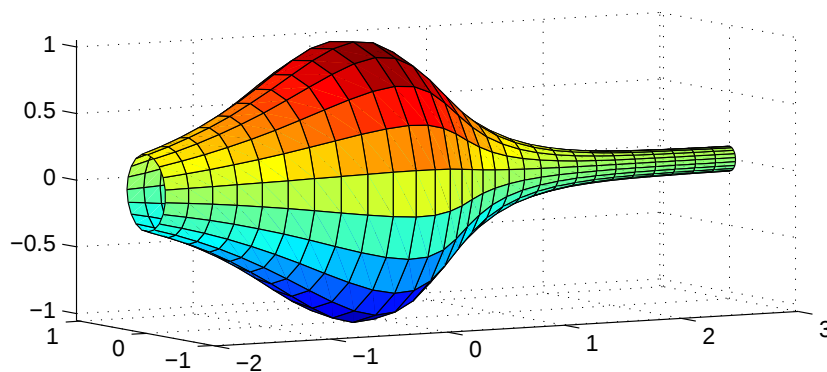
Betrakta kurvan som ger grafen av en funktion $y = f(x)$ över ett intervall $a \leq x \leq b$. Som exempel kan vi ta

$$f(x) = \frac{1 - 0.5 \sin(x)}{1 + x^2}, \quad -2 \leq x \leq 3$$

Så här ser kurvan ut



Låter vi denna kurva rotera runt x -axeln får vi en rotationsyta



och vi vill beräkna den inneslutna volymen samt mantelarean.

Volymen som begränsas av rotationsytan ges av (Stewart kapitel 6.2)

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

och mantelarean ges av (Stewart kapitel 8.2)

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

För vårt exempel nöjer vi oss med en numerisk beräkning av volymen V och mantelarean S enligt

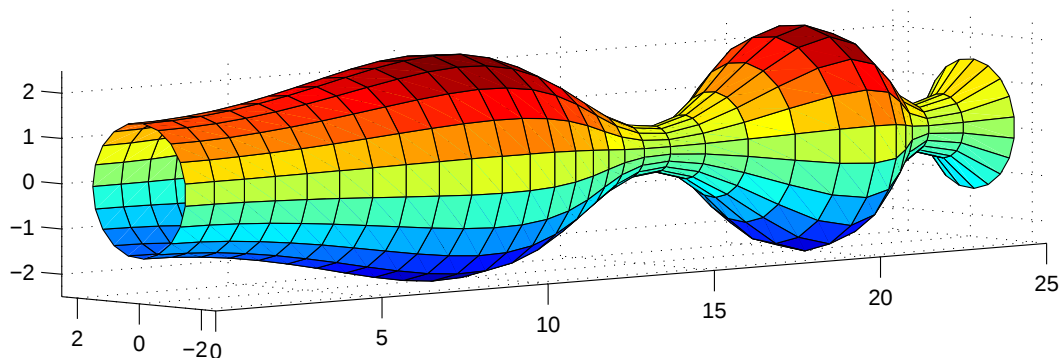
```
>> f=@(x)(1-0.5*sin(x))./(1+x.^2);  
>> Df=@(x)-0.5*cos(x)./(1+x.^2)-(1-0.5*sin(x))*2.*x./(1+x.^2).^2;  
>> a=-2; b=3;  
>> gv=@(x)f(x).^2;  
>> V=pi*integral(gv,a,b)  
V =  
    5.1095  
>> gs=@(x)abs(f(x)).*sqrt(1+Df(x).^2);  
>> S=2*pi*integral(gs,a,b)  
S =  
   16.3260
```

Uppgift 3. Beräkna volymen som innesluts av rotationsytan som bildas då grafen till

$$f(x) = 1.5 + \sin(0.02x^2), \quad 0 \leq x \leq 25$$

roterar runt x -axeln. Även mantelarean skall beräknas.

Så här ser ytan ut

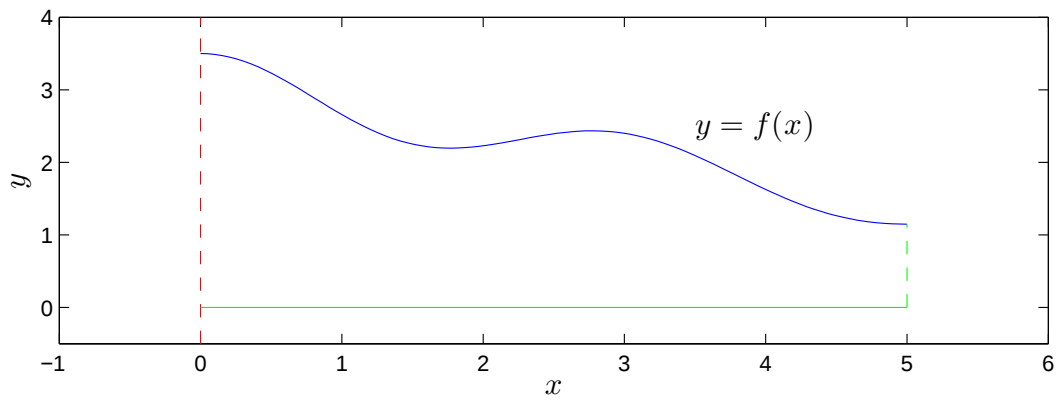


Uppgift 4. På kurshemsidan ligger en funktion som heter `rotationsyta`. Använd funktionen för att rita upp rotationsytan för $f(x) = 1.5 + \sin(0.02x^2)$ på intervallet $0 \leq x \leq 25$.

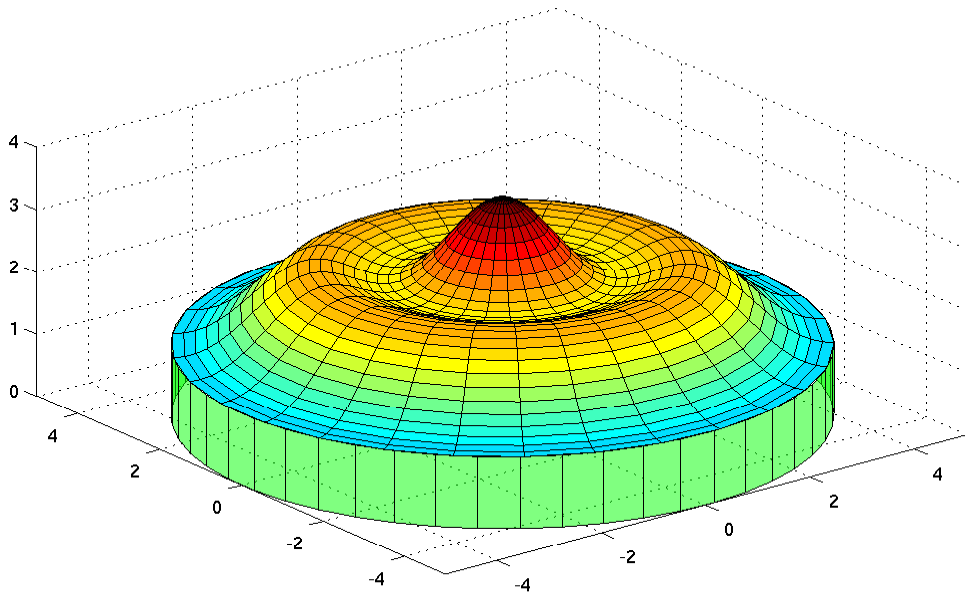
Betrakta kurvan som ger grafen av en funktion $y = f(x)$ över ett intervall $0 \leq a \leq x \leq b$. Som exempel kan vi ta

$$f(x) = \frac{3 + 0.5 \sin(\pi/2 + 2x)}{1 + 0.05x^2}, \quad 0 \leq x \leq 5$$

Så här ser kurvan ut



Låter vi denna kurva rotera runt y -axeln får vi en rotationsyta



och vi vill beräkna den inneslutna volymen (mellan ytan och horisontella planet som ges av $y = 0$) samt mantelarean.

Volymen ges i vårt fall av (Stewart kapitel 6.2)

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

och mantelarean ges av (Stewart kapitel 8.2)

$$S = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Vi beräknar integralerna enligt

```
>> f=@(x)(3+0.5*sin(pi/2+2*x))./(1+0.05*x.^2);
>> Df=@(x)cos(pi/2+2*x)./(1+0.05*x.^2)...      % Fortsätter på nästa rad
      -0.1*x.*(3+0.5*sin(pi/2+2*x))./(1+0.05*x.^2).^2;
>> a=0; b=5; gv=@(x)x.*f(x);
```

```
>> V=2*pi*integral(gv,a,b)
V =
    150.1175
>> gs=@(x)x.*sqrt(1+Df(x).^2);
>> S=2*pi*integral(gs,a,b)
S =
    91.6250
```

Uppgift 5. Beräkna volymen som innesluts av rotationsytan som bildas då grafen till

$$f(x) = 1 - \frac{\sin(5x)}{x}, \quad 1 \leq x \leq \pi$$

roterar runt y -axeln. Även mantelarean skall beräknas.