Svar till tentamen i Flervariabelanalys 2013-10-21

1. Svar: Sätt $z=x^2+y^2$ och uttnyttja standardgränsvärdet $\lim_{z\to 0}\dfrac{e^z-1}{z}=1$

2. Svar: $R=5$

$r'(2\pi)=(3,0,4)$, $r''(2\pi)=(0,5,0)$ vilket ger $K=\dfrac{|(3,0,4)\times(0,5,0)|}{|(3,0,4)|^3}=\dfrac{25}{125}=\dfrac{1}{5}$ alltså är krökningsradien $R=5$

3. Svar: 0.5366

Sätt $f(x,y)=\arcsin(\dfrac{x}{y})$ och låt $x=2, y=4, \Delta x=0.02, \Delta y=-0.05$

Approximationssatsen ger $\arcsin(\dfrac{2.02}{3.95})-\arcsin(\dfrac{2}{4})=0.02\cdot\dfrac{1}{4\cdot\sqrt{1-\dfrac{2^2}{4^2}}}+0.05\dfrac{2}{4^2\sqrt{1-\dfrac{2^2}{4^2}}}$

dvs $\arcsin(\dfrac{2.02}{3.95})\approx\arcsin(1/2)+\dfrac{0.02}{4\cdot\sqrt{\dfrac{3}{4}}}+\dfrac{0.1}{16\sqrt{\dfrac{3}{4}}}=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{0.18}{16\sqrt{\dfrac{3}{4}}}\approx 0.5366$

4. Svar: Lokalt minimum i punkten $(1,1)$

$f(x,y)=2x^2+2y^2+3xy-7\ln(xy)$

$f'_x(x,y)=4x+3y-\dfrac{7}{x}$

$f'_y(x,y)=4y+3x-\dfrac{7}{y}$

Om vi först sätter:

$f'_x=0,\quad f'_y=0$

dvs.

$4x+3y-\dfrac{7}{x}=0$ och $4y+3x-\dfrac{7}{y}=0$

Om vi multiplicerar första raden med x och andra med y får vi:

$4x^2+3xy-7=0$

$4y^2+3xy-7=0$

Sätter vi ekvationerna lika med varandra får vi nu $4x^2=4y^2$ dvs $x=y$ (vi behöver inte studera $x=-y$ eftersom båda antas vara positiva i uppgiften).

Om $x=y$ får vi att exempelvis $4x+3x-\dfrac{7}{x}=0$ vilket ger att $x^2=1$ och alltså $x=1$ och alltså $y=1$.

Vi har alltså hittat en punkt, nämligen $(1,1)$.

Om vi studerar andraderivatan i punkten får vi:

$f''_{xx}(1,1)=4+7=11$

$f''_{yy}(1,1)=4+7=11$

$f''_{xy}=f''_{yx}=3$

dvs $D=121-9>0$ samt $f''_{xx}=11>0$, alltså har vi ett lokalt minimum i punkten $(1,1)$

5. Svar: $\pi(\pi^2-4)$

Vi skriver upp formeln för volymberäkning $\pi\int_0^{\pi} x^2\sin(x)\,dx$ varpå vi upptäcker att vi kan partialintegrera:

$$\pi\int_0^{\pi} x^2\sin(x)\,dx=\pi\left([-x^2\cos(x)]_0^{\pi}+\int_0^{\pi} 2x\cos(x)\,dx\right)$$

Vi partialintegrerar igen:

$$\pi\left([-x^2\cos(x)]_0^{\pi}+\underbrace{[2x\sin(x)]_0^{\pi}}_{=0}-\int_0^{\pi} 2\sin(x)\,dx\right)$$

Sista integralen beräknas och vi får slutligen:

$$\pi\left([-x^2\cos(x)+2\cos(x)]_0^{\pi}\right)=\pi\left((2-\pi^2)\cdot(-1)-2\right)=\pi(\pi^2-4)$$

6. Svar: 0

Vi noterar att $P'_y=Q'_x=3x\sqrt{y}$ och att fältet därmed är konservativt, vilket i sin tur innebär att arbetet är oberoende av vägen.

Alternativ 1: Vi kan alltså beräkna $\Phi(x,y)=x^2y^{\frac{3}{2}}$ och sedan $\Phi(1,0)-\Phi(-1,0)=0$

Alternativ 2: Vi väljer en ny väg $y=0, 0<x<1$ vilket ger $\int_{-1}^{1} 0\,dx=0$

7. Svar: Tangenten är $2x-2y+3z=2\pi$ och normalen är $\frac{6}{\pi}(x-1)=-\frac{6}{\pi}(y-1)=\frac{4}{\pi}(z-\frac{2\pi}{3})$

Först tar vi reda på z värdet.

$x=1, y=1$ ger $z=\frac{2\pi}{3}$

Nu sätter vi $f(x,y,z)=z\arctan(\sqrt{\frac{x}{y}})-\frac{\pi^2}{6}$ och beräknar gradienten

$$\nabla f=\left(\frac{z}{(1+\frac{x}{y})\cdot 2\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot y},\quad -\frac{xz}{(1+\frac{x}{y})\cdot 2\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot y^2},\quad \arctan(\sqrt{\frac{x}{y}})\right)$$

dvs.

$$\nabla f(1,1,\frac{2\pi}{3})=(\frac{\pi}{6},-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})$$

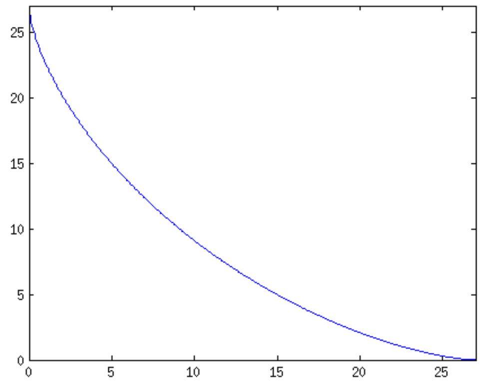
Således blir tangentplanets ekvation

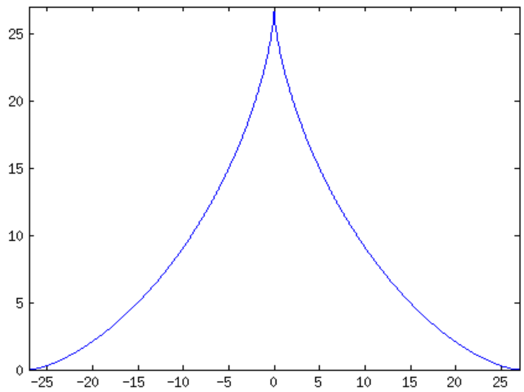
$$\frac{\pi}{6}(x-1)-\frac{\pi}{6}(y-1)+\frac{\pi}{4}(z-\frac{2\pi}{3})=0\Leftrightarrow(x-1)-(y-1)+\frac{3}{2}z-\pi=0\Leftrightarrow 2x-2y+3z=2\pi$$

och normalen blir:

$$\frac{6}{\pi}(x-1)=-\frac{6}{\pi}(y-1)=\frac{4}{\pi}(z-\frac{2\pi}{3})$$

8a) Svar: Vi ritar kurvan $y=(9-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$, både tolkningen $x>0$ eller x reellt godkänns





b) Svar: $\frac{4374\pi}{5}$ eller $\frac{8748\pi}{5}$ beroende på tolkning i uppgift a)

Vi antar nedan att $x>0$ *så gränserna för rotation kring* x *axeln blir* $0\leq x\leq 27$. *P.g.a. symmetri kommer det andra svaret fås genom att multiplicera det första med 2. (Man kan även räkna med gränserna* $-27\leq x\leq 27$ *och på så sätt få ut arean.*

Ansätt $y=(9-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

Då erhålls $y'=\frac{3}{2}(9-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}\cdot(-\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}})=-x^{-\frac{1}{3}}(9-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$

och $(y')^2=x^{-\frac{2}{3}}(9-x^{\frac{2}{3}})=9\mathrm{x}^{-\frac{2}{3}}-1$

så $1+(y')^2=9\mathrm{x}^{-\frac{2}{3}}$

och $\sqrt{1+(y')^2}=3\mathrm{x}^{-\frac{1}{3}}$

Nu används formeln $2\pi\int_I y\sqrt{1+(y')^2}\,dt=6\pi\int_I yx^{-\frac{1}{3}}dt$

Alternativ 1: från bilden i a) ser vi att gränserna blir $0\leq x\leq 27$ om vi roterar kurvan kring x-axeln, alltså har vi: $6\pi\int_0^{27}(9-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}dx$

Vi noterar $-\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}$ är den inre derivatan av $(9-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ och att vår integral alltså blir

$$6\pi[-\frac{3}{5}(9-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{2}}]_0^{27}=-\frac{18\pi}{5}[(9-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{2}}]_0^{27}=-\frac{18\pi}{5}(0-3^5)=\frac{3^5\cdot 18\pi}{5}=\frac{4374\pi}{5}$$

Alternativ 2: Vi använder variabelsubstitution $x(t)=27\cos^3(t), y(t)=27\sin^3(t)$ vilket ger $dx=-81\cos^2(t)\sin(t)dt$ och gränserna $\frac{\pi}{2}\leq t\leq 0$. Integralen blir således

$$6\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{27\sin^3(t)}{3\cos(t)}\cdot(-81\cos^2(t)\sin(t))dt=-\frac{27\cdot 81\cdot 6\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^4(t)\cdot\cos(t)dt=$$

$$-9\cdot 81\cdot 6\pi[\frac{\sin^5(t)}{5}]_{\frac{\pi}{2}}^{0}=-4374\pi(0-\frac{1}{5})=\frac{4374\pi}{5}$$

Alternativ 3: Använd formeln $2\pi\int_I y\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt$ och variabelsubstitutionen för att få

$$2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} 27\sin^3(t)\sqrt{(-81\cos^2(t)\sin(t))^2+(81\sin^2(t)\cos(t))^2}\,dt$$

Vi förenklar uttrycket $\sqrt{(-81\cos^2(t)\sin(t))^2+(81\sin^2(t)\cos(t))^2}$:

$$\sqrt{(-81\cos^2(t)\sin(t))^2+(81\sin^2(t)\cos(t))^2}=$$

$$=\sqrt{81^2(\cos^4(t)\sin^2(t)+\sin^4(t)\cos^2(t))}=81\sqrt{(\cos^2(t)\sin^2(t)(\cos^2(t)+\sin^2(t)))}=$$

$$=81\sqrt{(\cos^2(t)\sin^2(t))}=81\cos(t)\sin(t)$$

Vår integral är således $81\cdot 27\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4(t)\cos(t)\,dt=4374\pi\left[\frac{\sin^5(t)}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4374\pi}{5}$