Problem.

Beräkna krökningen och krökningsradien för ~~ku~~ kurvan $y = e^x$ i punkten $x = 0$

Lösning 1. Krökningen ges av formeln

$$K(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}, \quad \text{krökningsradien } R(x) = 1/K(x).$$

I vårt fall $f''(x) = (e^x)'' = e^x = 1$ i $x = 0$.
$f'(x) = (e^x)' = e^x = 1$ i $x = 0$.

Alltså får vi: $K(0) = \frac{|1|}{(1 + 1^2)^{3/2}}$

$$= \frac{1}{2^{3/2}}. \Longrightarrow \underline{R(x) = 2^{3/2}}.$$

Lösning 2. Kurvan $y = f(x)$ på parameterform ges av $\bar{r}(t) = (t, f(t)) \Rightarrow$
$\bar{r}(t) = (t, e^t)$ i vårt fall.

Vidare: $\dot{\bar{r}}(t) = (1, f'(t)) = (1, e^t)$,
$\ddot{\bar{r}}(t) = (0, e^t)$

Punkten $x = 0$ motsvarar $t = 0$, ty $x = t. \Longrightarrow$
vi måste beräkna $|(1, e^0) \times (0, e^0)| =$
$= |(1,1) \times (0,1)|$ eftersom vi måste använda formeln $K(t) = \frac{|\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}}|}{|\dot{\bar{r}}|^3}$ (se s. 15 i boken)

$$(1,1) \times (0,1) = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1) \text{ (kolla själva!)}$$

$\Longrightarrow |\dot{\bar{r}}(0), \ddot{\bar{r}}(0)| = 1$. Vidare: $|\dot{\bar{r}}(0)| = |(1,1)| = \sqrt{1^2 + 1^2} = 2^{1/3} \Longrightarrow$

$K(0) = 1/2^{3/2}$