Modelltenta, lösningar.

1. Man ska beräkna $\int_1^2 \sqrt{((t^3-3t)')^2+((3t^2)')^2}\,dt$

$$((t^3-3t)')^2 = 3^2(t^2-1)^2;\quad ((3t^2)')^2 = 36t^2$$

$$9(t^4-2t^2+1)+36t^2 = 9(t^4+2t^2+1) = 3^2(t^2+1)^2$$

$$\Rightarrow \int_1^2 = \int_1^2 3(t^2+1)\,dt = t^3+3t\Big|_1^2 = 14-4=10$$

Svar: 10

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^4}{x^2+y^2} = 0 \iff$

$\left|\dfrac{xy^4}{x^2+y^2}\right| \to 0.$ Vi ska uppskatta

$\dfrac{|xy^4|}{x^2+y^2}$, ty $x^2+y^2 \geq 0$: $\quad \dfrac{|xy^4|}{x^2+y^2} \leq \dfrac{|xy^4|}{y^2} = |xy^2| \to$

$\to 0$ om $(x,y)\to(0,0)$.

Se också Ex. 5.1 på s. 21!

5. Enligt app. satsen $f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \approx$
$\approx f'_x(x,y)\cdot\Delta x + f'_y(x,y)\cdot\Delta y$. I vårt fall gäller:

$f(x,y) = x\sqrt{y}$; $x=1$, $y=4$; $\Delta x = -0{,}03$, $\Delta y = 0{,}08$;

$$\begin{cases} f(1,4)=2 \\ f'_x(1,4)=2 \\ f'_y(1,4)=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \quad 0{,}97\sqrt{4{,}08} \approx 2 + 2\cdot(-0{,}03) + \tfrac{1}{4}\cdot 0{,}08 = 1{,}96$$

4. Först, ska vi lösa systemet

$$\begin{cases} f'_x=0 \\ f'_y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2+6y=0 \\ 12y+6x=0 \end{cases} \Rightarrow \text{andra ekvationen}$$

$\Rightarrow x=-2y \Rightarrow 4y^2+2y=0 \Rightarrow y_1=0,\ y_2=-\frac{1}{2} \Rightarrow$

$x_1=0,\ x_2=+1 \Rightarrow$ vi har 2 stationära punkter

$(0,0)$ och $(+1,-\frac{1}{2})$.

Nu ska vi beräkna $\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}$ i $(0,0)$ och $(1,-\frac{1}{2})$.

1. $(0,0)$ ger $\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = -36<0 \Rightarrow (0,0)$ är sadel eller terasspunkt.

2. $(1,-\frac{1}{2})$ ger $\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 36>0$. Vidare,

$f''_{xx}(1,-\frac{1}{2})=6>0 \Rightarrow$ lok. min.

<u>Svar</u>: $(0,0)$ är sadel eller terasspunkt,
$(1,-\frac{1}{2})$ är lok. min

3. Vi ska räkna $\iint\limits_{x^2+y^2\le 2} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy$.

Polära koordinater $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$, $0\le r\le\sqrt{2}$
$0\le\theta\le 2\pi$
$x^2+y^2=r$
$dxdy=r\,dr\,d\theta$

ger $\iint\limits_{x^2+y^2\le 2} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4r^2}\,r\,dr = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\,r\,dr$

$$\int \sqrt{1+4r^2}\; r\,dr = \int \sqrt{1+4r^2}\; d(1+4r^2)\cdot \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{8} \int \sqrt{1+4r^2}\; d(1+4r^2) \overset{z=1+4r^2}{=} \frac{1}{8}\int \sqrt{z}\,dz$$

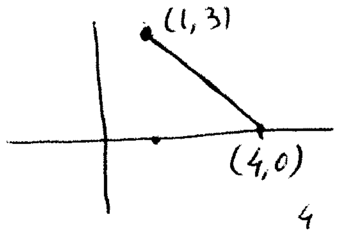
$$= \frac{1}{8}\, z^{3/2}\cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{12}\,(1+4r^2)^{3/2} \Longrightarrow$$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 2} = \frac{2\pi}{12}\,(1+4r^2)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{6}\,9^{3/2} - \frac{2\pi}{6}$$

$$= \frac{54\pi}{12} - \frac{2\pi}{12} = \frac{52}{12}\pi = \frac{13}{3}\pi .$$

<u>Svar:</u> $\frac{13}{3}\pi$

7. $\overline{F} = (3\sqrt{x}+y^2,\ 2xy)$ är ett konservativ vektorfält, ty $(3\sqrt{x}+y^2)'_y = 2y = (2xy)'_x$. $\Longrightarrow$ kan vi välja vilken kurva som helst mellan $(1,3)$ och $(4,0)$ och vidareintegrera längst denna kurva.



Vi väljer $y = 4-x$!

$$\Longrightarrow \text{arbetet} = \int_1^4 \left(3\sqrt{x}+(4-x)^2\right)dx + \int_1^4 2x(4-x)\,d(4-x)$$

$$= \int_1^4 \left(3\sqrt{x}+(4-x)^2-(8x-2x^2)\right)dx = \int_1^4 \left(3\sqrt{x}+3x^2-16x+16\right)dx$$

$$= 14+63-120+48 = 5.$$

<u>Svar:</u> 5

2a. $\bar{e} = (7,4,-4)$. Vi har:

$$f'_{\bar{e}} = \frac{\bar{e} \bullet \nabla f}{|\bar{e}|} = \frac{\bar{e} \bullet grad(f)}{|\bar{e}|}$$

Vi måste räkna:

1) $|\bar{e}| = \sqrt{7^2+4^2+4^2} = \sqrt{49+32} = \sqrt{81} = 9$

2) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)(1,0,2)$

$$f'_x = z e^{xy} + xz \cdot y e^{xy} = 2, \text{ om } (x,y,z) = (1,0,2)$$

$$f'_y = x^2 z e^{xy} = 2$$

$$f'_z = x e^{xy} = 1 \implies grad(f) = \nabla f = (2,2,1).$$

3) $\bar{e} \bullet grad(f) = (7,4,-4) \bullet (2,2,1) = 14+8-4 = 18 \implies$

$f'_{\bar{e}}(7,4,-4) = \frac{18}{9} = 2$. Svar 2a: 2.

2b. Låt $\bar{s}$ vara vilken riktning som helst.

$$f'_{\bar{s}} = \frac{\bar{s} \bullet grad(f)}{|\bar{s}|} = \frac{|\bar{s}| \cdot |grad(f)| \cdot \cos\theta}{|\bar{s}|} = |grad(f)| \cdot \cos\theta,$$

då är θ vinkeln mellan $grad(f)$ och $\bar{s}$.

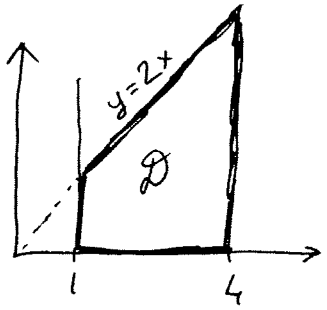
Största cos värdet är $1 \implies f'_{\bar{s}}$ är störst

då $\cos\theta = 1$ och det största vardet är $|grad(f)|$.

$|grad(f)(1,0,2)| = |(2,2,1)| = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = 3$.

Svar 2b: 3

8. Steg 1: $\mathcal{D} =$



Steg 2: $\sqrt{1+(f_x')^2+(f_y')^2} = \sqrt{1+\left(\left(\sqrt{2xy}\right)_x'\right)^2+\left(\left(\sqrt{2xy}\right)_y'\right)^2}$

$= \sqrt{1+\frac{y}{2x}+\frac{x}{2y}} = \sqrt{\frac{2xy+y^2+x^2}{2xy}} = \frac{x+y}{\sqrt{2xy}}$, ty $x>0, y\geq$

(OBS! $\sqrt{(x+y)^2} = |x+y| = x+y$, pga $x>0$, $y\geq 0$).

Steg 3. $\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{x+y}{\sqrt{2xy}}\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathcal{D}} \left(\sqrt{\frac{x}{2y}}+\sqrt{\frac{y}{2x}}\right)dx\,dy =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{\frac{x}{y}}\,dx\,dy + \frac{1}{\sqrt{2}}\iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{\frac{y}{x}}\,dx\,dy$

Steg 4. $\iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{\frac{x}{y}}\,dx\,dy = \int_1^4 \sqrt{x}\cdot\left(\int_0^{2x} y^{-\frac{1}{2}}dy\right)dx = \int_1^4 \sqrt{x}\cdot 2\sqrt{y}\Big|_0^{2x} dx$

$= \int_1^4 \sqrt{x}\cdot 2\sqrt{2x}\;dx = 2\sqrt{2}\int_1^4 x\,dx = \sqrt{2}\cdot x^2\Big|_1^4 = \sqrt{2}\cdot 15;$

Vidare, $\iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{\frac{y}{x}}\,dx\,dy = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\int_0^{2x}\sqrt{y}\,dy\right)dx = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{2}{3}\cdot y^{3/2}\Big|_0^{2x} dx$

$= \frac{2}{3}\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}(2x)^{3/2} = \frac{2\cdot 2^{3/2}}{3}\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot x^{3/2}dx = \frac{2\cdot 2^{3/2}}{3}\int_1^4 x\,dx =$

$= \frac{2\cdot 2^{3/2}}{3}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_1^4 = \frac{2^{3/2}}{3}\cdot 15 = 5\cdot 2^{3/2};$

$\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{x+y}{\sqrt{2xy}}\,dx\,dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\cdot 15 + 5\cdot 2^{3/2}\right) = 15+5\cdot 2 = 25.$

Svar: 25.

Söndag, 2013-10-20: på MV Chalmers gäller 0764 220277.

Lycka till på tentan den 21/10!