# Kursmaterial "Normal och Tangentplan"

1. Ytor i $\mathbb{R}^3$ på 3 olika former.

   (A) $z = f(x,y)$;

   (B) Nivåyta till $g(x,y,z)$: $g(x,y,z) = C$;

   (C) Yta på parameterform (används senare):

$$\begin{cases} x = x(s,t) \\ y = y(s,t) \\ z = z(s,t) \end{cases}$$

   (i LW använder man $u, v$ i stället för $s, t$).

2. Om $(x_0, y_0, z_0) = P$ ligger på vår yta, bestäms normallinjen som går genom $P$ på följande sätt: (OBS! normallinjen kallas för <u>normal</u> i LW)

   Vi börjar med fallet (B): Normalen i $P(x_0, y_0, z_0)$ bestäms på parameterform

$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \cdot t = x_0 + At; \\ y = y_0 + \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \cdot t = y_0 + Bt; \\ z = z_0 + \dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \cdot t = z_0 + Ct; \end{cases}$$

   med $A = g'_x(x_0, y_0, z_0)$, $B = g'_y(x_0, y_0, z_0)$, $C = g'_z(x_0, y_0, z_0)$.

   Fallet (A) reduceras till (B) genom följande observation: $z = f(x,y) \Longleftrightarrow z - f(x,y) = 0$,

   dvs kan vi sätta $g(x,y,z) = z - f(x,y)$ och $C = 0$.

Fallet C är lite mer komplicerat.

Först, fixerar vi $(s_0, t_0)$ som ger oss

$$x_0 = x(s_0, t_0), \quad y_0 = y(s_0, t_0), \quad z_0 = z(s_0, t_0).$$

Därefter ska vi beräkna två vektorer

$$\overline{S} = \left( \frac{\partial x}{\partial s}(s_0, t_0), \ \frac{\partial y}{\partial s}(s_0, t_0), \ \frac{\partial z}{\partial s}(s_0, t_0) \right) \text{ och}$$

$$\overline{T} = \left( \frac{\partial x}{\partial t}(s_0, t_0), \ \frac{\partial y}{\partial t}(s_0, t_0), \ \frac{\partial z}{\partial t}(s_0, t_0) \right.$$

och dessa vektorprodukt $\overline{S} \times \overline{T} = \begin{vmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3 \\ x'_s & y'_s & z'_s \\ x'_t & y'_t & z'_t \end{vmatrix}$

$= (A, B, C)$, alla partiella derivator beräknas i $(s_0, t_0)$.

Normalen på parameterform ges av

$$\begin{cases} x = x_0 + Aq \\ y = y_0 + Bq \\ z = z_0 + Cq \end{cases}$$

vi använder $q$ för parameter, ty $s, t$ är upptagna.

## 3. Tangentplan ekvation.

Trots att talen $A, B, C$ beräknas på olika sätt i fallen A, B, C, ges tangentplanets ekvation i alla tre fallen likadant:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$