Övning 100, s. 43.

Lösning. S1. Skriv om den ursprungliga ekvationen i variabler $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$.

Kedjeregeln ger oss

$$f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = f'_u + f'_v, \text{ ty } u'_x = 1, v'_x = 1.$$

$$f'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = f'_u - f'_v, \text{ ty } u'_y = 1, v'_y = -1.$$

$$f'_x + f'_y = (f'_u + f'_v) + (f'_u - f'_v) = 2f'_u \Longrightarrow$$

$$2f'_u = 4(x+y)f = 4uf \Longrightarrow \boxed{f'_u = 2uf}.$$

Slut på S1.

S2. Lös ekvationen $f'_u = 2uf$, dvs man måste hitta almänna lösningen.

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 2uf \quad \text{och det är separabla variabler}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial f}{f} = 2u\,\partial u$$

{Integrera och betänk att "integrationskonstanten" är en funktion av v}

$$\ln|f| = u^2 + C(v)$$

$$\Updownarrow$$

$$|f| = e^{C(v)} \cdot e^{u^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$f = C_1(v) \cdot e^{u^2}.$$

(Här är $C_1(v) = \pm e^{C(v)}$

Svar på S2: $f(u,v) = C_1(v) \cdot e^{u^2}$ är den allmänna lösningen till $\rightarrow$ $\rightarrow f'_u = 2uf$ (kontrollera det). I (x,y)-koordinater (variabler) $f(x,y) = C_1(x-y)\,e^{(x+y)^2}$

S3. Finn f, som uppfyller $f(x,-x)=e^{2x}$.

Vi måste bestämma C_1, som är vilken funktion som helst i en variabel (den är deriverbar).

$$\underset{\displaystyle e^{2x}}{\underset{\|}{f(x,-x)}} = C_1(x-(-x))\cdot e^{(x+(-x))^2} = C_1(2x)\cdot e^0 = C_1(2x).$$

Alltså får vi: $C_1(2x)=e^{2x} \Longrightarrow$

$$C_1(t)=e^t \Longrightarrow C_1(x-y)=e^{x-y} \Longrightarrow$$

$$\boxed{f(x,y)=e^{x-y}\cdot e^{(x+y)^2}=e^{(x+y)^2+x-y}} \leftarrow \text{Svar på S3}$$

Det är den partikulära lösning, som uppfyller villkoret (ibland kallas bivillkoret) $f(x,-x)=e^{2x}$.